## ANEKS MATEMATYCZNY

### Algebra wektorów

Wektor – obiekt posiadający trzy cechy: wartość, kierunek i zwrot.
Chociaż wektorowi można przypisać punkt przyłożenia, to punkt przyłożenia nie stanowi jego cechy. W opisie wektora istnieje umowa, że jego początek znajduje się w początku układu współrzędnych. Dlatego jednoznaczny opis wektora ogranicza się do podania współrzędnych końca wektora.
W niniejszym podręczniku procesy opisywane są w przestrzeni trójwymiarowej, w układzie kartezjańskim, czyli w układzie trzech wzajemnie prostopadłych osi. Istnieją różne konwencje zapisu takich wektorów. Najbardziej lapidarny opis, to trzy zapisane w odpowiedniej kolejności liczby stanowiące rzuty końca wektora na poszczególne osie. Na przykład: [1,2,3] to wektor, którego koniec posiada następujące współrzędne: x=1, y=2, z=3. Jeżeli wektor ewoluuje, wówczas jego składowe są funkcjami czasu: [x(t),y(t),z(t)]. Można również stosować zapis naturalny, co oznacza, że określony wektor $\vec{r}(t)$ może być przedstawiony jako suma swoich składowych:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k} \tag{11.1}$$

W opisie tym litery i-j-k oznaczają wersory, czyli wektory jednostkowe. Wektor jednostkowy to iloraz wektora przez jego wartość.

*Iloczyn wektorowy*

Wynikiem mnożenia wektorowego jest wektor o kierunku prostopadłym do płaszczyzny wyznaczanej przez wymnażane wektory, natomiast zwrot określa się z reguły śruby prawoskrętnej.
Regule prawoskrętnej ulegają też iloczyny wersorów, np.: $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$ $\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}$
Moduł wyniku mnożenia wektorowego to iloczyn wartości wektorów i sinusa kąta pomiędzy nimi.
Należy zauważyć, że $\hat{i} \times \hat{i} = 0$ $\hat{j} \times \hat{j} = 0$ $\hat{k} \times \hat{k} = 0$
Przykład mnożenia wektorowego:

$$\vec{a}(t) = a_i(t)\,\hat{i} + a_j(t)\,\hat{j} + a_k(t)\,\hat{k}$$

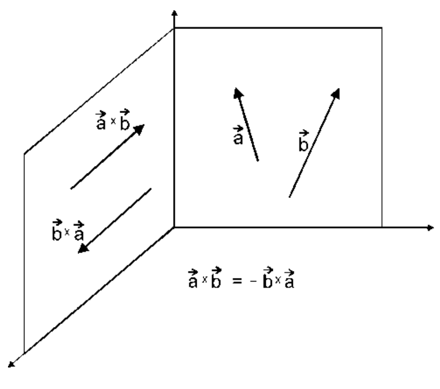
$$\vec{b}(t) = b_i(t)\,\hat{i} + b_j(t)\,\hat{j} + b_k(t)\,\hat{k}$$

$$\vec{a}(t) \times \vec{b}(t) = (a_i(t)\,\hat{i} + a_j(t)\,\hat{j} + a_k(t)\,\hat{k}) \times (b_i(t)\,\hat{i} + b_j(t)\,\hat{j} + b_k(t)\,\hat{k}) =$$

$$= (a_i(t)\cdot b_i(t)\;\hat{i}\times\hat{i} + a_i(t)\cdot b_j(t)\;\hat{i}\times\hat{j} + a_i(t)\cdot b_k(t)\;\hat{i}\times\hat{k} +$$

$$+ a_j(t)\cdot b_j(t)\;\hat{j}\times\hat{j} + a_j(t)\cdot a_k(t)\;\hat{j}\times\hat{k} + a_k(t)\cdot b_k(t)\;\hat{k}\times\hat{k} =$$

$$= a_j(t)\cdot a_k(t)\,\hat{i} + a_i(t)\cdot b_k(t)\,\hat{j} + a_i(t)\cdot b_j(t)\,\hat{k}$$




Rys. 11.1. Określanie zwrotu iloczynu wektorowego dwóch wektorów.

*Iloczyn skalarny*
Wynikiem mnożenia skalarnego jest wielkość skalarna stanowiąca iloczyn wartości wektorów i cosinusa kąta pomiędzy nimi.

Należy zauważyć, że $\hat{i} \times \hat{i} = 1 \quad \hat{j} \times \hat{j} = 1 \quad \hat{k} \times \hat{k} = 1$, natomiast iloczyny mieszane wersorów wynoszą zero.

**Funkcje zespolone**
**Zespolone liczby,** uporządkowane pary liczb rzeczywistych (a, b), w zapisie

$$\hat{z} = a + ib \tag{11.2}$$

dla których zdefiniowana jest relacja równości oraz określone są przemienne i łączne działania dodawania i mnożenie. Element urojony i ma tę własność, że ii=-1, albo $i = \sqrt{-1}$

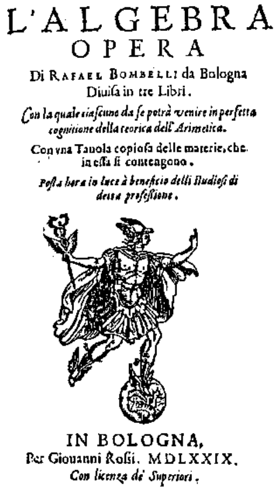
$$\hat{z}_1 = a_1 + ib_1$$
$$\hat{z}_2 = a_2 + ib_2$$
$$\hat{z} = \hat{z}_1 + \hat{z}_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$
$$\hat{z} = \hat{z}_1 \cdot \hat{z}_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

Podczas dzielenia należy dzielną i dzielnik pomnożyć przez sprzężony dzielnik. Liczba sprzężona $\hat{z}$' liczby zespolonej $\hat{z} = a + ib$ to $\hat{z}' = a - ib$

$$\hat{z} = \hat{z}_1 / \hat{z}_2 = \frac{z_1 \cdot z_2'}{\hat{z}_2 \cdot z_2'} = \ldots$$

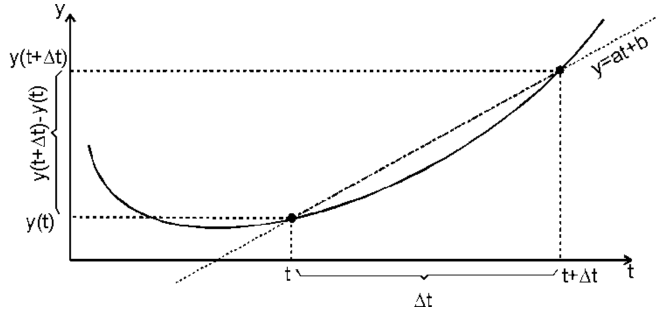
W geometrii na płaszczyźnie liczba zespolona (jako para liczb) jest interpretowana jako wskaz należący do tzw. płaszczyzny zespolonej. Długość tego wskazu, zwana jest modułem liczby zespolonej.
Liczby zespolone zapisywane są w postaci algebraicznej, trygonometrycznej i wykładniczej. Składniki liczby zespolonej mogą być funkcjami, np. czasu. Więcej informacji o działaniach na funkcjach zespolonych można znaleźć w rozdziale 2 i 6.
Liczby zespolone wprowadził w XVI w. R. Bombelli w rozważaniach nad rozwiązaniem równań algebraicznych trzeciego stopnia. Liczby zespolone (oraz funkcje zespolone, macierze itp.) okazały się bardzo użyteczne do opisu wielu zagadnień fizyki teoretycznej.

**BOMBELLI Raffaele** (?-1572), matematyk i konstruktor włoski, projektant prac melioracyjnych w dolinie Chiana w Toskanii, autor dzieła *Algebra, część większa arytmetyki* (t. 1-3, 1572), w którym jako pierwszy podał własności i najprostsze działania dla liczb zespolonych oraz ich zastosowanie w rozwiązywaniu równań trzeciego stopnia.


L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuisa in tre Libri.
*Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.*
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
*Posta hora in luce à beneficio delli studiosi di detta professione.*
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
*Con licenza de' Superiori.*

**Iloraz różnicowy**

Iloraz różnicowy wyrażony zależnością 11.3 geometrycznie stanowi współczynnik kierunkowy siecznej dwóch punktów na wykresie funkcji f(t), punktów o współrzędnych: [t, f(t)] oraz [t+Δt, f(t+Δt)] (rys. 11.2).

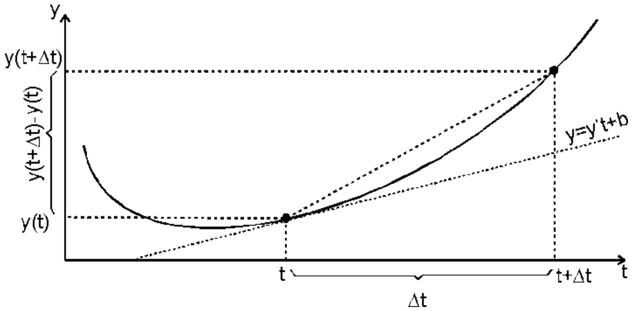



Rys. 11.2. Graficzna interpretacja ilorazu różnicowego a.

$$a=\frac{\Delta f}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \qquad (11.2)$$

**Pochodna**

Pochodna stanowi granicę ilorazu różnicowego przy $\Delta t \to 0$ i jest wyrażona zależnością 11.4. Jej geometryczny wyraz to współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f(t) (rys. 11.4).




Rys. 11.3. Graficzna interpretacja pochodnej y'.

$$y'=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \qquad (11.2)$$

W kinematyce ilorazem różnicowym jest np. szybkość średnia, a pochodną – szybkość.

Przykłady pochodnych funkcji elementarnych:

$(a\,t^{n})' = a\,n\,t^{n-1}$

$(\sin t)' = \cos t$

$(\cos t)' = -\sin t$

$(\ln t)' = \frac{1}{t}$

$(e^{t})' = e^{t}$

Należy pamiętać o następujących zasadach:

Pochodna sumy (różnicy) dwóch funkcji to suma (różnica) pochodnych.

Pochodna iloczynu funkcji f oraz funkcji g: $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$

Pochodna ilorazu funkcji f oraz funkcji g: $(f/g)'=(f'\cdot g - f\cdot g')/g^2$

Pochodna funkcji złożonej [F(f(t)]’ = F’·f’

**Całka nieoznaczona**

Obliczanie całki nieoznaczonej to znajdowanie funkcji pierwotnej względem różniczkowania (znajdowania pochodnej). Do wyniku całkowania należy dodać dowolna stałą. Jedną z istotnych w fizyce (szczególnie w dynamice) umiejętności jest identyfikacja fizykalnego znaczenia stałej całkowania. Przykładem całki nieoznaczonej jest szybkość liczona jako całka z wartości wektora przyspieszenia stycznego albo droga jako całka z szybkości.

Przykłady całek funkcji elementarnych:

$$\int \mathrm{a}\, t^n \, dt = \mathrm{a}\, \tfrac{t^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \tfrac{1}{t}\, dt = \ln t + C$$

$$\int \sin(t)\, dt = -\cos t + C$$

$$\int \cos(t)\, dt = \sin t + C$$

$$\int e^t dt = e^t + C$$

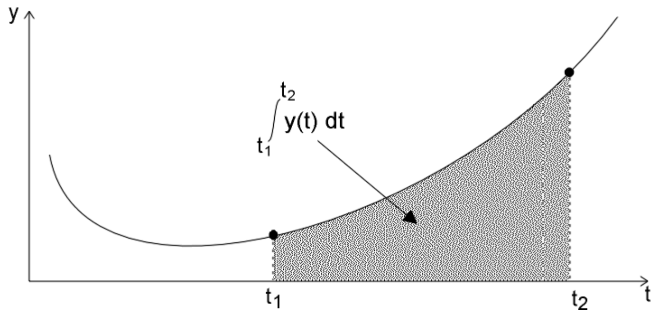
$$\int \sin^2 t \, dt = \int \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2t)\, dt = ...$$

$$\int \cos^2 t \, dt = \int \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2t)\, dt = ...$$

Należy pamiętać o zasadzie, iż całka sumy (różnicy) dwóch funkcji to suma (różnica) całek tych funkcji, oraz o tym, iż całka z iloczynu dwóch funkcji może być policzona metodą tzw. „przez części”.

**Całka oznaczona**

Całka oznaczona z funkcji f(t), czyli liczona w określonych granicach od $t_1$ do $t_2$, interpretowana jest jako powierzchnia na wykresie tej funkcji ograniczona od góry przebiegiem funkcji, od dołu osią odciętych, a boków - prostymi $t = t_1$ od lewej oraz $t = t_2$ od prawej.




Rys. 11.4. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej.

Przykładem całki oznaczonej jest praca siły F(s) na drodze od $s_1$ do $s_2$.