Zbigniew Otremba, Wyższa Szkoła Morska w Gdyni
Pracownia fizyki I
Wprowadzenia teoretyczne

W A H A D Ł O   S K R Ę T N E

1. Drgania harmoniczne
2. Wahadło torsyjne
3. Moment bezwładności
4. Wyznaczanie momentu bezwładności

1. Drgania harmoniczne

Drganiami harmonicznymi nazywamy ruch masy *m* wzdłuż współrzędnej *x*, gdy na masę tę działa siła (tzw.siła kierująca) proporcjonalna do wartości tej współrzędnej, z przeciwnym znakiem.

F=-kx $\quad a = \frac{F}{m}$ (zasada dynamiki Newtona)

Po uwzględnieniu definicji przyśpieszenia powstaje równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-kx}{m}$$

równanie to ma rozwiązanie w postaci funkcji x=A sin(ωt+φ)

A - amplituda; ω - częstość (2π/T); argument sinusa - faza; φ - faza początkowa

Rozwiązanie okazuje się poprawne, gdy ω^2 = k/m (czyli: kwadrat częstości jest stosunkiem stałej proporcjonalności *k* (znajdującej się przy funkcji *x*) do stałej przy drugiej pochodnej (w tym przypadku masa *m*).

2. Wahadło torsyjne

... wykonuje również drgania harmoniczne, tyle że nie w ruchu posuwistym (postępowym), tylko w ruchu skrętnym (obrotowym). Zasada dynamiki Newtona w zastosowaniu do ruchu obrotowego ujęta jest w brzmieniu analogicznym jak w przypadku ruchu postępowego: $\varepsilon = \frac{M}{I}$ słownie: przyspieszenie kątowe bryły jest proporcjonalne do momentu siły, a współczynnikiem proporcjonalności jest odwrotność momentu bezwładności. Ruch harmoniczny skrętny - ruch torsyjny - wystąpi wówczas, gdy na bryłę działa tzw. moment powracający, proporcjonalny do położenia kątowego φ (wychylenia kątowego):

M=-Dφ

D - współczynnik proporcjonalności (moduł sprężystości);

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{-D\varphi}{m}$$

Przez zastosowanie analogii do drgań w ruchu postępowym, ustala się związek częstości *ω* z modułem sprężystości *D* i momentem bezwładności *I*:

ω^2 = D/I

3. Moment bezwładności

Moment bezwładności jest pojęciem stworzonym po to, aby w przypadku ruchu obrotowego zastosować matematycznie identyczną formułę wyrażającą zasadę dynamiki, jak dla ruchu postępowego; wówczas stosuje się:

w miejsce przyśpieszenia ⇒ przyśpieszenie kątowe
siły ⇒ moment siły
masy ⇒ moment bezwładności

<u>Przyśpieszenie kątowe</u>, <u>moment siły</u> i <u>moment bezwładności</u> określane są <u>względem tej samej osi</u>.

Pojęciowa definicja momentu bezwładności:

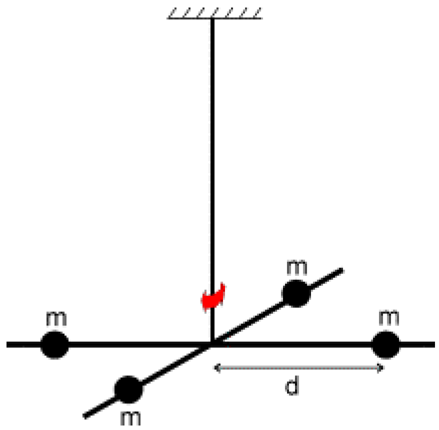
$$I = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} m_i r_i^2$$

Operacyjna definicja momentu bezwładności:

dJ = r^2 dm

co w wersji słownej brzmi: elementarny moment bezwładności *dI* elementarnej masy *dm* odległej o *r* od osi obrotu to iloczyn kwadratu tej odległości i elementarnej masy. O elementarnej masie można powiedzieć, że jest to masa punktów jednakowoodległych od osi obrotu. Elementarna masa układa się w kształt cylindra o elementarnej grubości.

4. Wyznaczanie momentu bezwładności



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$$

gdzie: $I = I_o + 4\, m\, d^2$

D – moduł sprężystości (związany ze współczynnikiem sprężystości materiału, z jakiego wykonany jest pręt, jego długością i powierzchnią przekroju)

I_o – moment bezwładności samego ‘krzyżaka’ (z wyłączeniem 4 mas m)

Zatem teoretyczna zależność **okresu** T drgań wahadła skrętnego od **odległości** d ciężarków od osi wyraża się następująco:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_o + 4m\,d^2}{D}}$$

Po obustronnym podniesieniu do kwadratu:

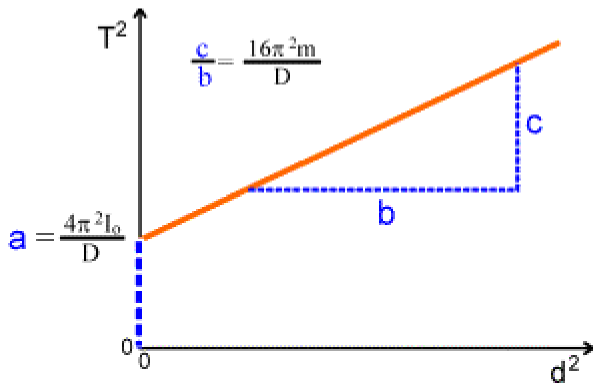
$$T^2 = \frac{4\pi^2 I_o}{D} + \frac{16\pi^2 m}{D} d^2$$

W powyższym wyrażeniu oznaczmy:

$$a = \frac{4\pi^2 I_o}{D}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{16\pi^2 m}{D}$$

Jest to układ dwóch równań, z którego można wyznaczyć I_o oraz D (znając **a**, **b** i **c**)



Na wykresie $T^2 = f(d^2)$ odczyta się wartości **a**, **b** i **c**, a następnie obliczy I_o:

$$I_o = 4m\,\frac{a}{c/b}$$