10. ELEMENTY TEORII POMIARU - POMIAR, JEGO OPRACOWANIE I INTERPRETACJA

Na wynik każdego pomiaru wpływa duża ilość czynników. Większość z nich jest nieidentyfikowalna, a intensywność ich oddziaływania fluktuuje w sposób przypadkowy. Dlatego chociaż niemożliwe jest ustalenie prawdziwej wartości wyniku pomiaru, teoria pomiaru zajmuje się ustalaniem zasad prowadzenia pomiaru i opracowywania wyników w sposób zapewniający ustalenie wartości mierzonej maksymalnie zbliżony do wartości rzeczywistej.
Pomiary dzielą się na bezpośrednie i pośrednie. Bezpośredni pomiar przeprowadzany jest za pomocą przyrządu przeznaczonego do pomiaru jednej tylko wielkości, natomiast pomiar pośredni polega na pomiarach kilku wielkości i zastosowaniu odpowiedniej formuły matematycznej do obliczenia wyniku.

10.1. Pomiary bezpośrednie

O dokładności wyniku decydują czynniki takie jak: jakość przyrządu, ilość powtarzanych pomiarów, warunki pomiaru, a także - w dużym stopniu - umiejętności osoby przeprowadzającej pomiar. Istotne jest także, aby wyeliminować tzw. błąd systematyczny; dlatego przyrząd musi być poprawnie wyjustowany (np. w Urzędzie Miar i Wag).
Zakłada się, że jeżeli na wartość wyniku pomiaru wpływa duża ilość nieidentyfikowalnych czynników, rozkład wartości wyniku zbliżony jest do centralnej części tzw. rozkładu Gaussa wyrażonego funkcją 10.1.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{10.1}$$

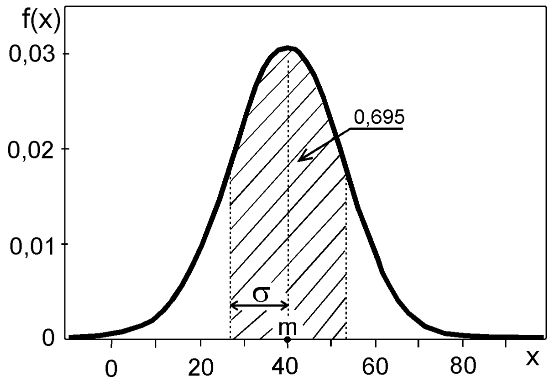
gdzie: σ - odchylenie standardowe
m - wartość średnia

$$m = \sum_{i=1}^{n} p_i \; x_i \tag{10.2}$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i \; x_i^2 - m^2} \tag{10.3}$$

gdzie: p_i – prawdopodobieństwo wystąpienia wyniku x_i

Maksimum rozkładu można utożsamiać ze średnią z wielokrotnie powtarzanych pomiarów, a odchylenie standardowe – z szerokości rozkładu na poziomie około 0,6 jego wysokości (rys. 10.1).



Rys. 10.1 Rozkład Gaussa.

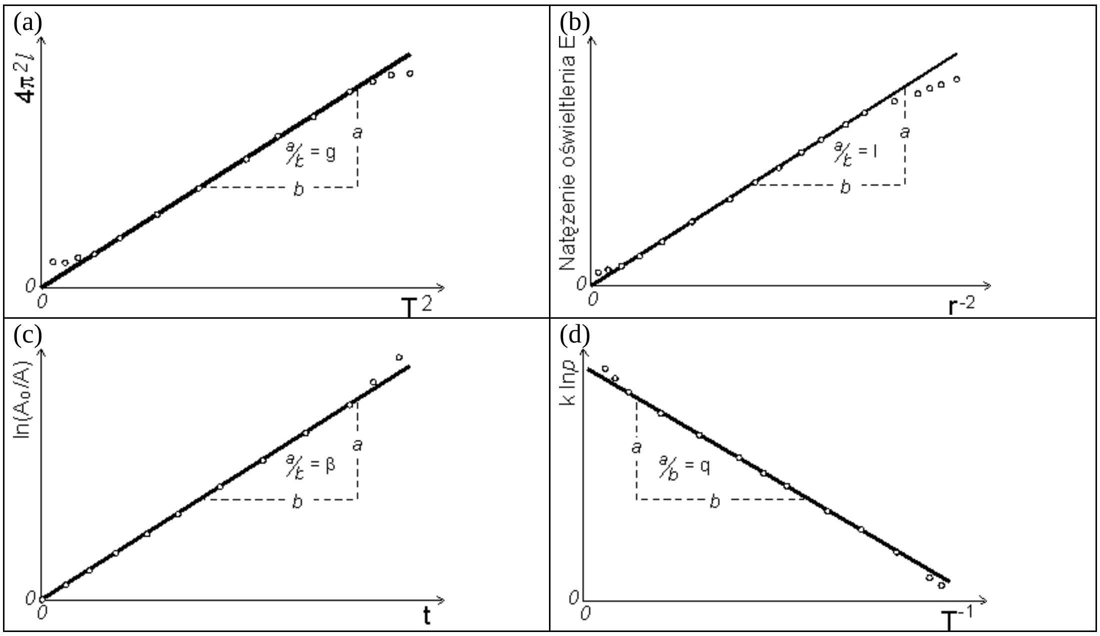
Funkcja Gaussa jest gęstością prawdopodobieństwa wartości wyniku pomiaru. Funkcja pozwala obliczyć prawdopodobieństwo $P(x_1, x_2)$, że wynik zawiera się w określonym przedziale $x_1 \rightarrow x_2$:

$$P(x_1, x_2) = \int_{x_2}^{x_2} f(x)\, dx \qquad (10.4)$$

Prawdopodobieństwo że wynik pomiaru znajdzie się w przedziale [m-σ; m+σ] wynosi 69,5 % (zielony obszar na wykresie)
Prawdopodobieństwo że wynik pomiaru znajdzie się w przedziale [m-2σ; m+2σ] wynosi 95,7 %
Prawdopodobieństwo że wynik pomiaru znajdzie się w przedziale [m-3σ; m+3σ] wynosi 99,6 %
Odchylenie standardowe przyjmuje się często jako wskaźnik błędu bezwzględnego.
Znaczenie praktyczne funkcji Gaussa poza przedziałem [m-3σ; m+3σ] jest nieistotne, ponieważ prawdopodobieństwo wyniku poza tym przedziałem jest znikome - mniejsze od 0,4 %.
Powyższe rozważania dotyczą wyniku pojedynczego pomiaru. Można także ustalić funkcję opisującą rozkład dla średniej z określonej ilości pomiarów. Odchylenie standardowe takiego rozkładu estymuje się inaczej ... (zagadnienia dotyczące przypadkowości badane są w obrębie dziedziny statystyki).

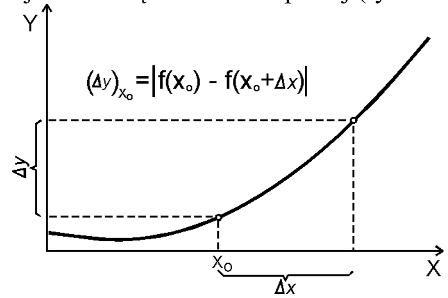
10.2. Pomiary pośrednie

Pomiary pośrednie prowadzi się w jak najszerszym zakresie warunków pomiaru, przy czym warunki te nie mogą wykraczać poza ramy stosowalności określonej formuły matematycznej wynikającej z przyjętej teorii. Kontrola stosowalności teorii jest stosunkowo łatwa, jeżeli zależność teoretyczna może być zlinearyzowana. Takie właśnie przypadki wykorzystuje się w dydaktyce fizyki. Linearyzacja jest możliwa np. przy wyznaczaniu natężenia pola grawitacyjnego z wykorzystaniem idei wahadła matematycznego, albo w wyznaczaniu natężenia źródła światła metodą Lamberta, wyznaczaniu współczynnika tłumienia kamertonu, czy wyznaczaniu ciepła parowania (rys. 10.2.). W przykładach pokazanych na rys. 10.2 współczynnik kierunkowy prostej (nie tangens kąta nachylenia!!!) stanowi szukaną wielkość. Podczas wykreślania prostej trzeba kierować się zasadą, aby przebiegała ona jak najbliżej punktów pomiarowych; ale uwzględniamy tylko punkty układające się wzdłuż prostej, czyli w przedziale stosowalności teorii.

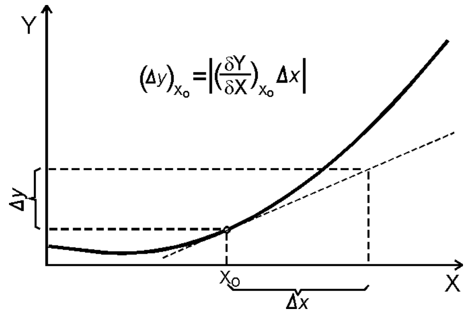


Rys. 10.2 Przykłady wyznaczania wielkości fizycznych: (a) natężenia pola grawitacyjnego g, (b) natężenia źródła światła I, (c) współczynnika tłumienia drgań β, (d) ciepła parowania q.

Na rys. 10.2 można zauważyć, iż na osiach odłożone bywają nie tylko pojedyncze wielkości ale także całe wyrażenia algebraiczne. Istotne jest, aby prawidłowo określić przedziały ich nieokreśloności (błędy bezwzględne). Jeżeli wyrażenie jest funkcją tylko jednej zmiennej, wtedy nieokreśloność zmiennej niezależnej przenosi się funkcyjnie na nieokreśloność zmiennej zależnej (rys. 10.3). Natomiast w przypadkach gdy zmienna zależna jest funkcją kilku zmiennych, jej nieokreśloność oszacowywana jest metodą różniczki zupełnej (rys. 10.4).



Rys. 10.3. Nieokreśloność wyrażenia Y=f(X) wyznaczania sposobem podstawowym.



Rys. 10.4. Nieokreśloność wyrażenia Y=f(X) wyznaczana metodą różniczki.

Przykład różniczki funkcji dwóch i więcej zmiennych - tzw. różniczka zupełna:

$$f(a,l) = \sqrt{a^2 + l^2} \tag{10.5}$$

$$df(a,l) = \frac{\partial f}{\partial a}da + \frac{\partial f}{dl}dl = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + l^2}}da + \frac{-1}{\sqrt{a^2 + l^2}}dl \tag{10.6}$$

Przykład obliczania błędu bezwzględnego metodą różniczki zupełnej

$$\Delta f(a,l) = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right|\Delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial l}\right|\Delta l = \frac{a}{\sqrt{a^2 + l^2}}\Delta a + \frac{1}{\sqrt{a^2 + l^2}}\Delta l \tag{10.7}$$

gdzie: Δa – niepewność (uchyb) pomiaru wielkości a

Δl – niepewność (uchyb) pomiaru wielkości l

Przykład obliczania błędu względnego metodą różniczki zupełnej

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{a}{a^2 + l^2}\Delta a + \frac{b}{a^2 + l^2}\Delta l \tag{10.8}$$

Przy braku możliwości zmiany warunków pomiarów, czyli gdy pomiar musi być jednorazowy, a wynik musi być podany natychmiast, o jego jakości świadczy błąd względny. Na błąd ów wpływają uchyby poszczególnych pomiarów bezpośrednich i zastosowana teoria (reguła matematyczna).

Przykładem może być ćwiczenie popularne w dydaktycznych pracowniach fizyki polegające na wyznaczaniu równoważnika elektrochemicznego miedzi w elektrolizie wodnego roztworu siarczanu miedzi. W ćwiczeniu tym korzysta się z prawa elektrolizy, czyli ze stwierdzenia, że *ilość substancji wydzielonej na elektrodzie jest proporcjonalna do ładunku elektrycznego przepuszczonego przez elektrolit*. Jeżeli ilość wydzielonej substancji wyrażona jest masą *m*, wówczas współczynnikiem proporcjonalności jest tzw. równoważnik elektrochemiczny *k*. Zależność tę wyraża równanie ...
m = k Q
Jeżeli przez elektrolit płynie prąd stały, wtedy iloczyn jego natężenia *I* i czas przepływu *t* stanowi przepuszczony ładunek *Q*. Wyrażenie na równoważnik elektrochemiczny *k* przyjmuje zatem postać funkcji:

$$k(m, I, t) = \frac{m}{I\,t} \tag{10.9}$$

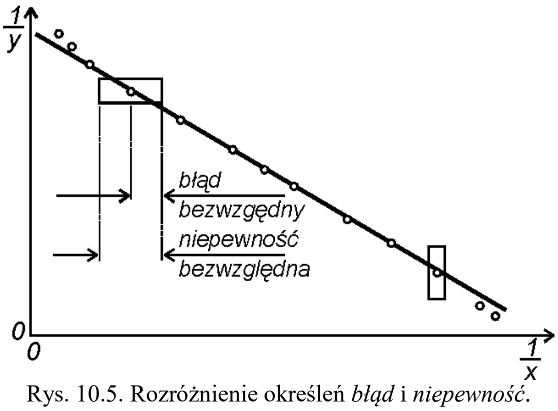
a wyrażenie na błąd względny:

$$\frac{\Delta k}{k}(m, I, t, \Delta m, \Delta I, \Delta t) = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta t}{t} \tag{10.10}$$

W wyrażeniu 10.10 poszczególne składniki informują o błędach, jakie wnoszą poszczególne pomiary (masy, prądu i czasu). Pomiar jest poprawnie przygotowany, jeżeli poszczególne składniki wnoszą podobne błędy.
Błąd względny wyliczony z zależności 10.10 jest teoretycznym błędem maksymalnym - założono bowiem, że błędy z poszczególnych pomiarów bezpośrednich kumulują się (a w praktyce mogą się częściowo wzajemnie znosić, ponieważ jedne wielkości mogą być zmierzone z nadmiarem, inne z niedomiarem). Jeżeli znana jest tablicowa wartość wyniku Y_{tabl}, można wyliczyć względny błąd pomiarowy δ (...).

$$\delta = \frac{\left|Y_{tabl} - Y_{zmierzone}\right|}{Y_{tabl}} \tag{10.11}$$

Oczywiste jest, że błąd względny teoretyczny wyliczony z zależności 10.10 powinien być większy od względnego błędu pomiarowego wyrażonego zależnością 10.11. Sytuacja odwrotna jest dowodem na to, że na błąd wpływają jeszcze czynniki inne, niż uwzględnione przy obliczaniu błędu teoretycznego. Jest to dobry sposób na testowanie stanowisk pomiarowych i systemów kontrolno-pomiarowych.



Rys. 10.5. Rozróżnienie określeń *błąd* i *niepewność*.

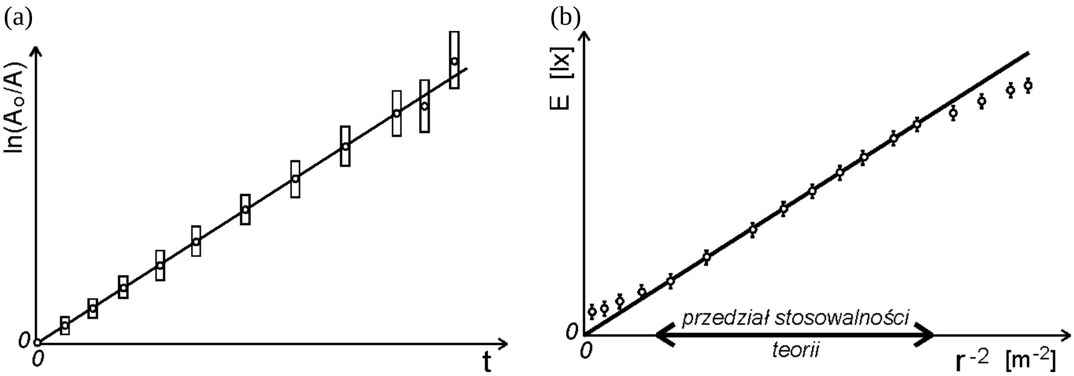
Oprócz określenia *błąd pomiarowy* spotyka się również określenie *niepewność pomiarowa* oraz *tolerancja*. Niepewność pomiarowa (bezwzględna lub względna) jest najczęściej kojarzona z podwojoną wartością *błędu względnego* (rys. 10.5). *Tolerancja* to jednowyrazowy synonim *niepewności pomiarowej*.

10.2. Interpretacja wyników

Można wyróżnić dwa następujące zasadnicze cele pomiarów:

- wyznaczenie wartości określonej wielkości
- sprawdzenie teoretycznej zależności.

W pierwszym przypadku rezultatem pomiaru jest wynik liczbowy wraz z jego dokładnością.
W drugim – opinia o stosowalności teoretycznej zależności. Wypracowanie tej opinii jest łatwe, jeżeli teoretyczna zależność jest linearyzowalna. Przykładem może być przypadek zilustrowany na rys. 10.6.



Rys. 10.6. Przykłady wykresów sporządzanych w ramach procedury „sprawdzanie".

Jeżeli na wykresie można poprowadzić prostą przechodzącą przez pola niepewności (rys.10.6a) *nie ma podstaw do stwierdzenia odstępstwa od teoretycznej zależności w całym zakresie warunków pomiaru*. Jeżeli w określonym zakresie warunków pomiaru prosta wykracza poza pola niepewności (rys. 10.6b) wtedy formuła *nie ma podstaw do stwierdzenia odstępstwa od teoretycznej zależności* odnosi się tylko do przedziału, w jakim prosta przechodzi przez prostokąty. Poza granicami tego przedziałem *stwierdza się odstępstwo od teoretycznej zależności*.
Można zatem w określonym przedziale zmienności warunków sformułować jeden z dwóch następujących wniosków:

- *wykryto odstępstwo od teorii*;
- *nie ma podstaw do stwierdzenia odstępstwa od teorii*.

Z formalno-logicznego punktu widzenia nie można nigdy ze stuprocentową pewnością stwierdzić, że wyniki potwierdzają teorię. Teoria jest bowiem wynikiem założeń *idealnych*, które w świecie *materialnym* nie są możliwe do spełnienia.