

7. ANALOGI

Analogiem zjawiska określa się taki układ elektryczny, którego matematyczny opis jest taki sam jak matematyczny opis zjawiska.

7.1. Obwód rozładowania kondensatora jako analog

W obwodzie rozładowania kondensatora (rys. 6.3.1.1) zanik ładunku ujęty jest równaniem Kirchhoffa (zob. równanie 6.3.1.1):

$$\frac{q}{C} + \frac{dq}{dt} R = 0 \quad (7.1.1)$$

Powstaje równanie różniczkowe, w którym niewiadomą funkcją jest zależność ładunku od czasu. Ładunek na kondensatorze może być mierzony za pomocą woltomierza o wysokiej oporności wewnętrznej – wynika to z definicji pojemności ($q = u C$).

Można wyróżnić jeszcze cały szereg zjawisk, których przebieg opisany jest równaniami podobnymi jak równanie 7.1. Należą do nich:

- zanik amplitudy drgań tłumionych
- rozpad promieniotwórczy
- wzór barometryczny
- prawo Lamberta-Beera
- oddziaływanie promieniowania z materią
- zależność współczynnika lepkości od temperatury
- zależność rezystancji półprzewodnika od temperatury
- prawo ostygnięcia

ANALOGIE	
<p style="text-align: center;">ZANIK DRGAŃ TŁUMIONYCH</p> <p>Zakłada się, że szybkość zaniku amplitudy $-\frac{dA}{dt}$ drgań jest w danym momencie proporcjonalna do chwilowej amplitudy A:</p> $-\frac{dA}{dt} = \beta A$ <p>gdzie β - współczynnik tłumienia</p>	<p>amplituda A \leftrightarrow ładunek $q = u C$</p> <p>czas t \leftrightarrow czas t</p> <p>współczynnik tłumienia β \leftrightarrow odwrotność RC</p>
<p style="text-align: center;">ROZPAD PROMIENIOTWÓRCZY</p> <p>Zakłada się, że szybkość rozpadu promieniotwórczego $-\frac{dN}{dt}$ jest w danym momencie proporcjonalna do chwilowej ilości preparatu N (ilość jąder izotopu, jego masa lub ilość moli preparatu):</p> $-\frac{dN}{dt} = \lambda N$ <p>gdzie λ - stała rozpadu</p> $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ <p>gdzie T - czas połowicznego zaniku</p>	<p>ilość preparatu \leftrightarrow ładunek q</p> <p>czas t \leftrightarrow czas t</p> <p>stała rozpadu λ \leftrightarrow odwrotność RC</p> <p>czas połowicznego zaniku T \leftrightarrow RC/ln2</p>

WZÓR BAROMETRYCZNY

Elementarny spadek ciśnienia dp przy elementarnej zmianie wysokości dh jest proporcjonalny do iloczynu gęstości powietrza ρ na tej wysokości, natężenia pola g (przyspieszenia ziemskiego) i dh :

$$- dp = \rho g dh$$

Po uwzględnieniu równania gazu doskonałego $p V = n R T$ otrzymujemy (zob. rozdział 9)

$$-\frac{dp}{dh} = \frac{\mu g}{RT} p$$

czyli wysokościowy indeks spadku ciśnienia $-\frac{dp}{dh}$ jest na danej wysokości proporcjonalny do ciśnienia na tej wysokości.

ciśnienie $p \leftrightarrow$ ładunek q
wysokość $h \leftrightarrow$ czas t
 $\mu g / RT \leftrightarrow$ odwrotność RC

PRAWO LAMBERTA-BEERA

Elementarny ubytek strumienia światła $-dI$ na elementarnej drodze światła dx jest proporcjonalny do strumienia światła w miejscu x :

$$- dI = \beta(\lambda) I dx$$

gdzie $\beta(\lambda)$ - współczynnik absorpcji światła o długości fali λ

strumień $I \leftrightarrow$ ładunek q
grubość $x \leftrightarrow$ czas t
 $\beta(\lambda) \leftrightarrow$ odwrotność RC

LAMBERT Johann Heinrich (1728-1777), matematyk, fizyk, astronom i filozof szwajcarski, członek AN w Berlinie, wprowadził funkcje hiperboliczne, udowodnił niewymierność liczby π , odkrył prawo fotometrii (prawo Lamberta), prawo absorpcji światła w jednorodnych ośrodkach mówiące, że ekstynkcja jest proporcjonalna do grubości absorbenta, wyznaczał orbity komet, badał zjawiska optyczne w atmosferze.



BERR Augustin – uczonego austro-węgierski (Czech), XIX wiek. Autor pionierskich prac z fotogrametrii. Odkrył prawo absorpcji światła w jednorodnych ośrodkach mówiące, że ekstynkcja jest proporcjonalna do stężenia roztworu.



<p style="text-align: center;">ODDZIAŁYWANIE PROMIENIOWANIA GAMMA Z MATERIAŁ</p> <p>Elementarny ubytek strumienia promieniowania $-dI$ na elementarnej drodze promieniowania dx jest proporcjonalny do strumienia promieniowania w miejscu x:</p> $-dI = \beta I dx$ <p>gdzie $\beta(\lambda)$ - współczynnik absorpcji promieniowania gamma</p>	<p>strumień $I \leftrightarrow$ ładunek q grubość $x \leftrightarrow$ czas t $\beta \leftrightarrow$ odwrotność RC</p>
---	--

<p style="text-align: center;">ZALEŻNOŚĆ WSPÓŁCZYNNIKA LEPKOŚCI OD TEMPERATURY</p> <p>Zależność współczynnika lepkości η od temperatury T opisuje z określoną dokładnością:</p> $\eta(T) = A e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$ <p>gdzie: ΔE to tzw. energia aktywacji, k - stała Boltzmannna A - stała bez znaczenia fizycznego</p>	<p>współczynnik $\eta \leftrightarrow$ ładunek q temperatura T [K] \leftrightarrow odwrotność czasu $k/\Delta E \leftrightarrow RC$</p>
--	--

Boltzmann Ludwigo Eduard (1844-1906), fizyk austriacki, profesor uniwersytetów w Grazu, Wiedniu, Monachium i Lipsku. W 1884 sformułował prawo promieniowania ciał o danej temperaturze (prawo Boltzmann-Stefana) oraz prawo rozkładu szybkości cząstek gazu doskonałego.



<p style="text-align: center;">ZALEŻNOŚĆ REZYSTANCJI POŁPRZEWODNIKA OD TEMPERATURY</p> <p>Zależność rezystancji R od temperatury T opisuje z określoną dokładnością funkcja:</p> $R(T) = A e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}$ <p>gdzie: ΔE to szerokość pasma wzbronionego, k - stała Boltzmannna A - stała bez znaczenia fizycznego</p>	<p>współczynnik $\eta \leftrightarrow$ ładunek q temperatura T [K] \leftrightarrow odwrotność czasu $2k/\Delta E \leftrightarrow RC$</p>
--	---

PRAWO OSTYGANIA	\leftrightarrow ładunek q
-----------------	-------------------------------

<p>Szybkość oddawania ciepła $-\frac{dQ}{dt}$ proporcjonalna jest do różnicy pomiędzy temperaturą ciała T a temperatura otoczenia T_{otocz}.</p> <p>Z definicji ciepła właściwego c elementarna ilość ciepła dQ oddanego przez masę m równa jest $m \cdot c \cdot dT$. Z tego względu</p> $T - T_{otocz} = (T_{pocz} - T_{otocz}) e^{-\frac{k}{mc} t}$ <p>Więcej informacji na temat teorii ostygnięcia można znaleźć w rozdziale 9.</p>	<p>różnica temperatur \leftrightarrow czas t czas $t \leftrightarrow RC \cdot k/m$ ciepło właściwe c</p>
---	--

7.2. Analog drgań harmonicznych prostych

Analogiem drgań harmonicznych prostych jest układ elektryczny złożony z kondensatora i cewki indukcyjnej.

$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$	$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0$

Tab. 7.2.1. Przykład oscylatora mechanicznego i jego analogu.

W analogu oscylatora harmonicznego w postaci ciężarka podłączonego do sprężyny istnieją następujące odpowiedniki:

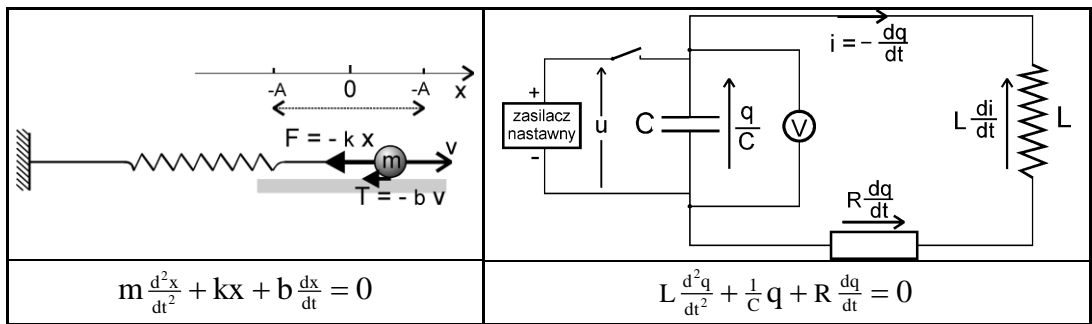
położenie x	ładunek elektryczny q
amplituda A	ładunek początkowy q_0
masa ciężarka m	indukcyjność cewki L
współczynnik sprężystości sprężyny k	odwrotność pojemności kondensatora $\frac{1}{C}$

Tab. 7.2.1. Zestawienie odpowiedników analogu oscylatora harmonicznego.

Można zatem przeprowadzić badania oscylatora mechanicznego posługując się jego analogiem. W badaniach tych wskazania podłączonego do kondensatora woltomierza są proporcjonalne do ładunku zgromadzonego na tym kondensatorze, a ładunek ów jest odpowiednikiem wychylenia ciężarka. Z racji tego, że napięcie na kondensatorze wyraża iloraz ładunku i pojemności, obserwacja ładunku na kondensatorze odbywa się za pomocą woltomierza o wysokiej oporności wewnętrznej. W praktyce w funkcji woltomierza należy zastosować oscyloskop, ponieważ umożliwia on również obserwację kształtu funkcji $x(t)$.

7.3. Drgania harmoniczne tłumione

Analog oscylatora harmonicznego tłumionego jest podobny do analogu oscylatora prostego. Dodany jest tylko rezystor o oporności R .



Tab. 7.3.1. Przykład oscylatora mechanicznego tłumionego i jego analogu.

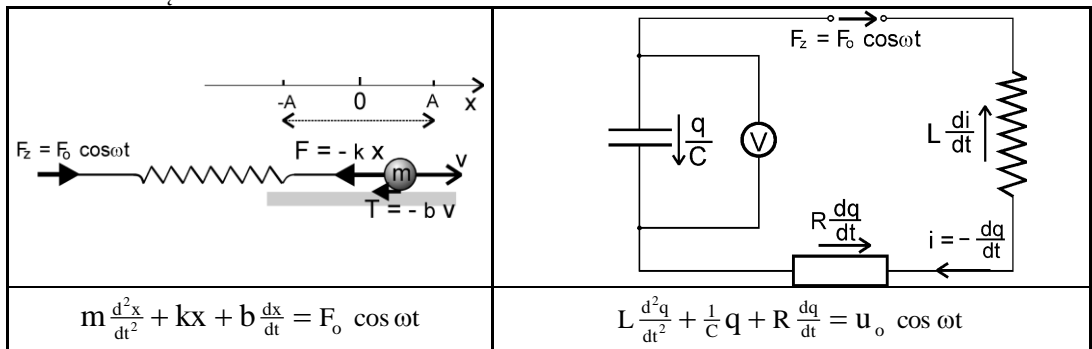
położenie x	ładunek elektryczny q
amplituda A_0	amplituda q_0
współczynnik oporu b	oporność R
współczynnik tłumienia $\beta = b/2m$	współczynnik tłumienia $\beta = R/2L$
amplituda $A = A_0 \exp[-\beta t]$	amplituda $q = q_0 \exp[-\beta t]$
masa ciężarka m	indukcyjność cewki L
współczynnik sprężystości sprężyny k	odwrotność pojemności kondensatora $\frac{1}{C}$

Tab. 7.3.1. Zestawienie odpowiedników analogu oscylatora tłumionego.

Powyższy analog może być użyty do zbadania oscylatora, gdy ten jest w różnym stopniu tłumiony. Można wówczas obserwować na ekranie oscyloskopu zmiany położenia w drganiach zarówno słabotłumionych, jak silnie tłumionych (aperiodycznych) – w tym w drganiach tłumionych krytycznie.

7.4. Drgania harmoniczne tłumione z siłą wymuszającą

Analog oscylatora harmonicznego tłumionego z siłą wymuszającą to szeregowy układ R-L-C podłączony do źródła prądu przemiennego o małej oporności wewnętrznej, z możliwością nastawiania częstotliwości.



Tab. 7.4.1. Przykład oscylatora mechanicznego tłumionego z siłą wymuszającą i jego analogu.

zewnątrzną siłą wymuszającą $F_z = F_o \cos \omega t$	zewnątrzne napięcie elektryczne $u = u_o \cos \omega t$
położenie x	ładunek elektryczny q
współczynnik oporu b	oporność R
współczynnik tłumienia $\beta = b/2m$	współczynnik tłumienia $\beta = R/2L$
amplituda $A = f(\omega)$	amplituda $q = f(\omega)$
masa ciężarka m	indukcyjność cewki L
współczynnik sprężystości sprężyny k	odwrotność pojemności kondensatora $\frac{1}{C}$

Tab. 7.4.2. Zestawienie odpowiedników analogu oscylatora tłumionego.

W rozdziale 2 rozważano ogólny kształt rozwiązania równania różniczkowego drgań wymuszonych. Ustalono ogólną postać tego rozwiązania w stanie ustalonym, czyli po długim czasie od przyłożenia siły wymuszającej. W rozwiązaniu znajdujemy informację, że układ wykonuje wówczas drgania z częstotnością siły wymuszającej o amplitudzie zależnej od częstotliwości. Kształt tej zależności jest różny przy różnych współczynnikach tłumienia.

Pełną postać rozwiązania równania drgań wymuszonych można uzyskać korzystając z analogu, bowiem znalezienie zależności $q(t)$ w układzie R-L-C podłączonym do napięcia przemiennego nie wymaga umiejętności rozwiązywania równań różniczkowych. Wystarczy bowiem zastosowanie reprezentacji zespolonej w układzie ruchomym. Natężenie prądu w obwodzie analogu wyrazi się następująco:

$$\hat{i} = \frac{u_o e^{j0}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} e^{j \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}} = \frac{u_o}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}} \quad (7.4.1)$$

a wyrażenie przedstawiające rzeczywiste natężenie prądu ma postać:

$$i = \frac{u_o}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cos(\omega t + \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}) \quad (7.4.2)$$

natomiast ładunek na kondensatorze, który jest całką z natężenia prądu względem czasu, wyraża funkcja 7.4.3.

$$\begin{aligned} q &= \frac{u_o}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \omega} \sin(\omega t + \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}) = \\ &= \frac{u_o}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \omega} \cos(\omega t + \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} + \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

Napięcie mierzone na kondensatorze zmienia się w rytmie zmian ładunku:

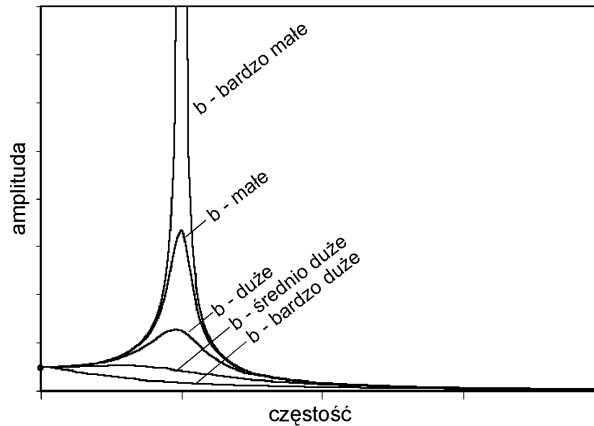
$$u_c = \frac{u_o}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \omega C} \cos(\omega t + \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} + \frac{\pi}{2}) \quad (7.4.4)$$

Napięcie to jest analogiem wychylenia oscylatora wymuszonego. Zatem, uwzględniając relacje odpowiedników, wychylenie oscylatora uzyskuje postać 7.3.5.

$$x = \frac{x_o}{\omega \frac{1}{k} \sqrt{b^2 + (\omega m - \frac{k}{\omega})^2}} \cos(\omega t + \arctg \frac{\omega m - \frac{k}{\omega}}{b} + \frac{\pi}{2}) \quad (7.4.5)$$

$$A(\omega) = \frac{x_o}{\omega \frac{1}{k} \sqrt{b^2 + (\omega m - \frac{k}{\omega})^2}} \quad (7.4.6)$$

Powyższe wyrażenie stanowi jednocześnie odpowiedź na pytanie postawione w rozdziale 2, mianowicie pytanie o wynik analitycznego wyprowadzenia zależności amplitudy drgań z siłą wymuszającą. Na rysunku 7.4.1 pokazano wykreślone na podstawie wyrażenia 7.4.6 zależności amplitudy drgań od częstości. Należy tu przypomnieć, że zależność 7.4.6 dotyczy stanu ustalonego, czyli po odpowiednio długim czasie (do kilku sekund) od przyłożenia siły wymuszającej.



Rys. 7.4.1. Wykresy zależności amplitudy drgań wymuszonych od częstości siły wymuszającej, przy różnych wartościach współczynnika tłumienia.