6. FIZYCZNE PODSTAWY ELEKTROTECHNIKI

6.1. Praca w polu elektrostatycznym

Podczas przemieszczania ładunku w polu elektrycznym wykonywana jest praca przeciwko sile działającej na ten ładunek. Biorąc pod uwagę definicję pracy ... oraz definicję natężenia pola elektrostatycznego można sformułować następującą definicję pracy w odniesieniu do pola elektrostatycznego:

$$W(q, E, x_1 \rightarrow x_2) = E\ q\ (x_2 - x_1) = E\ q\ d \tag{6.1.1}$$

Powyższa definicja przyjmuje następującą postać uogólnioną:

$$dW = q\ \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{6.1.2}$$

W elektryczności istnieje pojęcie potencjału elektrycznego, który jest zdefiniowany jako energia potencjalna jednostkowego ładunku. Ponieważ różnica energii potencjalnych pomiędzy dwoma punktami w sytuacji statycznej jest pracą potrzebną do przemieszczenia ładunku pomiędzy tymi punktami, dlatego w przypadku ładunku jednostkowego praca ta to różnica potencjałów pomnożona przez wartość ładunku.

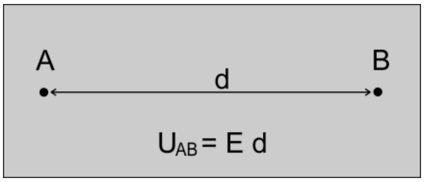
$$W = q\ (V_1 - V_2) \tag{6.1.3}$$

Różnica potencjałów elektrycznych pomiędzy dwoma punktami określana jest jako napięcie elektryczne pomiędzy tymi punktami. Z tego względu praca w polu elektrycznym jest iloczynem ładunku przemieszczanego między punktami oraz napięcia pomiędzy tymi punktami:

$$W = q\ u = E\ q\ d \tag{6.1.4}$$

Porównując 6.1.3 i 6.1.4 otrzymujemy związek natężenia pola i napięcia:

$$E\ d = U \tag{6.1.5}$$



Rys. 6.1.1. Związek napięcia elektrycznego z natężeniem jednorodnego pola elektrycznego.

Definicja pracy 6.1.4 może być uogólniona:

$$dW = u\ dq \tag{6.1.6}$$

Wtedy szybkość wykonywania pracy, czyli moc prądu wyrazi się następująco:

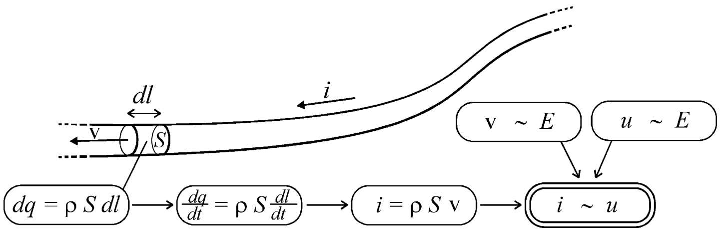
$$P = \frac{dW}{dt} = u\ \frac{dq}{dt} = u\ i \qquad \text{(6.1.7}$$

6.2. Prąd stały

Natężenie prądu to szybkość przepływu ładunku przez poprzeczny przekrój przewodnika.

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{6.2.1}$$

Aby w określonej przestrzeni mógł płynąć prąd elektryczny muszą być spełnione dwa warunki: konieczne jest aby istniały nośniki prądu i musi panować pole elektrostatyczne. Znajdujące się w materii nośniki prądu poruszają się ruchem chaotycznym w przypadkowych kierunkach. Ich średnia szybkość rośnie z temperaturą, natomiast średnia prędkość jest równa zeru w przypadku nieobecności pola elektrostatycznego. W przypadku gdy pole istnieje - wartość średniej prędkości ładunków jest proporcjonalna do natężenia pola.



Rys. 6.2.1. Geneza prawa Ohma.

Na rysunku 6.2 przedstawiony jest schemat rozumowania, zmierzającego do ustalenia tzw. prawa Ohma, czy do stwierdzenia, że natężenie prądu elektrycznego jest proporcjonalne do przyłożonego napięcia elektrycznego. Wywód ten rozpoczyna się od ustalenia, że elementarny ładunek znajdujący się w elementarnej objętości przewodnika to

$$dq = \rho' \, S \, dl \tag{6.2.2}$$

gdzie: ρ' = gęstość nośników prądu

Wyrażenie 6.2.2 po obustronnym zróżniczkowaniu względem czasu prowadzi do wyrażenia 6.2.2.

$$i = \rho' \, S \, v \tag{6.2.3}$$

OHM Georg Simon (1787-1854), fizyk niemiecki, profesor politechniki w Norymberdze (1833-1849) i uniwersytetu w Monachium (po 1849). Autor prac z dziedziny akustyki i badań nad elektrycznością. Sformułował (1826) i udowodnił prawo opisujące związek pomiędzy natężeniem (natężenie prądu elektrycznego) a napięciem prądu elektrycznego (Ohma prawo). Badając zależność oporności elektrycznej od formy geometrycznej przewodnika udowodnił istnienie oporności właściwej. Wykazał (1842), że ucho ludzkie dokonuje analizy harmonicznej dźwięku.

Uwzględniając wcześniejsze stwierdzenie, iż średnia prędkość nośników prądu jest proporcjonalna do natężenia pola elektrostatycznego, a także, że napięcie pomiędzy dwoma punktami w przewodniku jest proporcjonalne do panującego w przewodniku natężenia pola – można wywnioskować, że natężenie prądu musi być proporcjonalne do natężenia pola.

Jeżeli wyrażenie 6.2.3 jest obustronnie podzielone przez powierzchnię przewodnika S – powstaje następujący związek:

$$\sigma = \rho' \, v \tag{6.2.4}$$

gdzie σ = gęstość prądu w przewodniku.

Jeżeli uwzględnić proporcjonalność prędkości v względem natężenia pola E otrzymamy:

$$\sigma = \rho' \, k \, E \tag{6.2.5}$$

gdzie k = współczynnik proporcjonalności.

Mnożąc obydwie strony w wyrażeniu .. przez *S* oraz podstawiając E = u/*l* otrzymujemy:

$$i = \rho' \, k \, S \, u/l \; = \; \rho' \, k \, S/l \, u = \rho \, S/l \, u \tag{6.2.6}$$

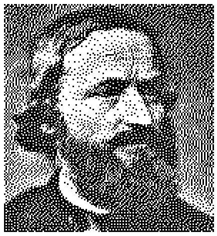
gdzie: ρ = ρ' k = przewodność właściwa, natomiast ρ·S/*l* = przewodność. Odwrotność przewodności (wyrażanej w simensach) to oporność (wyrażana w omach). Definicja oporności przedstawiana jest w następującej postaci:

$$R = \frac{du}{di} \tag{6.2.7}$$

Powyższa definicja oporności sugeruje nieliniowość zależności natężenia prądu od przyłożonego napięcia, czyli zaprzecza prawu Ohma. W istocie – w praktyce prawo Ohma spełnione jest bardzo rzadko. Właściwie jedynym przypadkiem gdy natężenie prądu byłoby proporcjonalne do napięcia w szerokim zakresie to sytuacja, gdyby opornik był umieszczony w termostacie.

W praktyce elektrotechnicznej obwody prądu stałego reprezentuje się za pomocą zestawu oporników oraz źródeł prądu połączonych bezoporowymi przewodami. Wówczas matematyzacja obwodu jest możliwa drogą stosowania prawa Ohma, prawa przepływu ładunków (I prawo Kirchhoffa) a także definicja pracy połączona z prawem zachowania energii (II prawo Kirchhoffa). Drugie prawo Kirchhoffa to stwierdzenie, że w polu elektrycznym przemieszczenie ładunku po torze/obwodzie zamkniętym wymaga wykonania pracy równej zeru. Naturalnie energia zużyta podczas tego przemieszczania jest niezerowa. Składnikami pracy wykonywanej nad jednostkowym ładunkiem podczas jego przemieszczania w polu elektrycznym po zamkniętym obwodzie są tzw. napięcia elektryczne czyli spadki napięć oraz siły elektromotoryczne. Poszczególne składniki owej pracy, czyli napięcia elektryczne, mają znaki dodatnie bądź ujemne. Napięcia oznaczane są strzałkami, których kierunek jest zgodny z kierunkiem dodatniej pracy wykonywanej nad jednostkowym ładunkiem dodatnim. Z tego względu stosowanie drugiej zasady Kirchhoffa jest łatwe - mianowicie: przemieszczamy w wyobraźni jednostkowy ładunek dodatni i algebraicznie sumujemy poszczególne prace. W praktyce obliczeniowej nie myślimy o wykonywaniu pracy ale sumujemy po kolei wszystkie napięcia stosując znak dodatni gdy kierunek napięcia jest zgodny z kierunkiem wyobrażonego przemieszczania jednostkowego ładunku dodatniego czyli z kierunkiem obchodzenia obwodu zamkniętego, i jest ujemny, gdy kierunek napięcia jest przeciwny z kierunkiem obchodzenia obwodu zamkniętego. Różne rodzaje napięć przedstawione są w tabeli 6.2.1. Napięcie na oporniku na rys...a to spadek napięcia, natomiast na rys .. b i c to napięcia na źródle prądu, czyli siła elektromotoryczna ε oraz spadek napięcia na oporności wewnętrznej źródła $u = i \cdot r$.

Kirchhoff Gustaw Robert (1824-1887), wybitny niemiecki fizyk, członek Berlińskiej, Petersburskiej i Paryskiej Akademii Nauk, profesor fizyki we Wrocławiu (1850-1854), Heidelbergu (1854-1875) i Berlinie (po 1875), badacz zjawisk elektrycznych (Kirchhoffa prawa) oraz ich związków ze zjawiskami mechanicznymi (elektrostrykcja, magnetostrykcja). Ponadto utor prac z dziedzin optyki i ciepła (prawo promieniowania), opracował wraz z R.W. Bunsenem metodę analizy spektralnej.



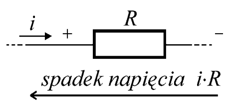
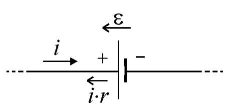
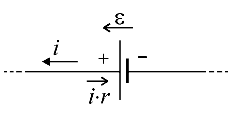
<table>
<tr><td></td><td>Napięcie na oporniku – spadek napięcia. Kierunek spadku napięcia jest zgodny z kierunkiem wykonywania dodatniej pracy nad przemieszczeniem jednostkowego ładunku dodatniego.</td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">Napięcie na źródle prądu stałego składa się z sumy siły elektromotorycznej i spadku napięcia na oporności wewnętrznej źródła spadek napięcia jest przeciwny do kierunku prądu elektrycznego.</td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

Tabela 6.2.1. Rodzaje napięć w obwodach prądu stałego.

Napięcie elektryczne pomiędzy dowolnymi dwoma punktami w obwodzie prądu określane jest poprzez sumowanie napotykanych po drodze napięć. Zakłada się, że punkt rozpoczęcia sumowania ma potencjał ujemny względem punktu końca sumowania. Wybór drogi sumowania nie ma znaczenia. Jeżeli efekt sumowania daje wynik ujemny (napięcie ujemne), wtedy wiadomo, że miejsce początku sumowania nie ma potencjału ujemnego względem końca sumowania ale jest

odwrotnie. Inaczej mówiąc, napięcie elektryczne nie posiada zwrotu od punktu początku sumowania do punktu końca sumowania – ale odwrotnie.
Podczas rozwiązywania obwodów prądu stałego należy założyć kierunki prądów w poszczególnych gałęziach. Jeżeli po rozwiązaniu okazuje się, że niektóre prądy są ujemne – oznacza to, że ich kierunki założono niewłaściwie.

Definicja pracy 6.1.6 po uwzględnieniu prawa Ohma powstają następujące formy definicji pracy w odniesieniu do prądu elektrycznego:

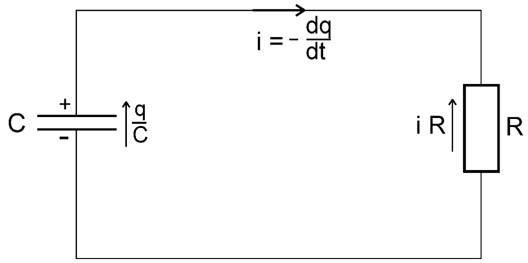
$$\mathrm{dW} = \mathrm{i}^2 \; R \, \mathrm{dt} \tag{6.2.8}$$

$$\mathrm{dW} = \frac{u^2}{R} \mathrm{dt} \tag{6.2.9}$$

6.3. Prąd zmienny – wybrane przykłady

6.3.1. Rozładowanie kondensatora

Problem rozładowania kondensatora polega na określeniu zależności natężenia prądu od czasu w obwodzie składającym się z naładowanego kondensatora i opornika (rys.6.3.1.1). Natężenie prądu w tym obwodzie wiąże się z ładunkiem elektrycznym zgromadzonym na kondensatorze – mianowicie, natężenie prądu, to szybkość rozładowywania kondensatora (ubywania ładunku na kondensatorze).



Rys. 6.3.1.1. Rozładowanie kondensatora.

W wyniku zastosowania drugiego prawa Kirchhoffa powstaje równanie:

$$\frac{q}{C} + \frac{dq}{dt} R = 0 \tag{6.3.1.1}$$

a po uwzględnieniu związku $i = -\frac{dq}{dt}$ zmienia się na:

$$\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{C}} - \mathrm{iR} = 0 \tag{6.3.1.2}$$

Powyższe równanie różniczkowe łatwo rozwiązać po rozdzieleniu zmiennych:

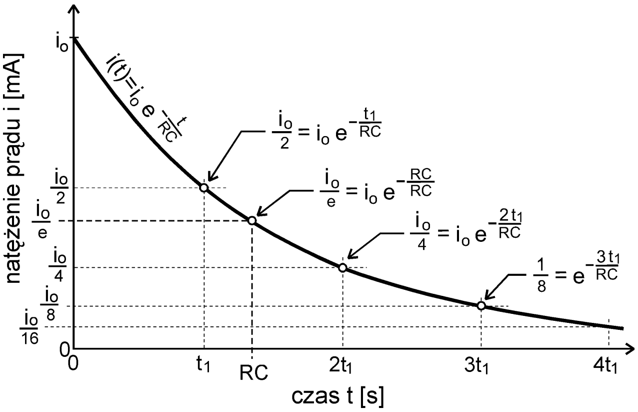
$$\frac{dq}{q} = \frac{1}{RC} dt \tag{6.3.1.3}$$

Wystarczy obie strony scałkować:

$$\mathrm{lnq} = \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{RC}} + \mathrm{K} \tag{6.3.1.4}$$

gdzie K jest stałą całkowania równą $ln q_o$. Równanie 6.3.1.4 można przekształcić w wyrażenie stanowiące funkcję ładunku na kondensatorze q w zależności od czasu t:

$$q = q_o \, e^{-\frac{t}{RC}} \tag{6.3.1.5}$$



Rys. 6.3.1.2. Rozładowanie kondensatora.

Różniczkując wyrażenie 6.3.1.5 względem czasu otrzymujemy funkcję opisującą zależność natężenia prądu od czasu:

$$i = \frac{q_o}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{u_o}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = i_o \, e^{-\frac{t}{RC}} \tag{6.3.1.6}$$

Funkcja 6.3.1.6 należy do rodziny eksponent (rys. 6.3.1.2). Kształt eksponenty zależy od iloczynu RC zwanego stałą czasową. Stała czasowa RC to czas, po jakim ładunek na kondensatorze maleje e-krotnie.

Korzystając z definicji pracy prądu elektrycznego oraz powyższej funkcji, można wyznaczyć pracę wykonana przez prąd elektryczny podczas pełnego rozładowania kondensatora. Praca ta jest równoznaczna z energią zgromadzoną w naładowanym kondensatorze.

$$dW = i^2 \, R \, dt \tag{6.3.1.7}$$

$$dW = \left(\tfrac{q_o}{RC}\right)^2 e^{-\frac{2t}{RC}} \, R \, dt \tag{6.3.1.8}$$

$$W = \left(\tfrac{q_o}{RC}\right)^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}} \, R \, dt = \cdots = \frac{q_o \, u_o}{2} \tag{6.3.1.9}$$

Po uwzględnieniu definicji pojemności kondensatora wyrażenie na energię zgromadzoną w kondensatorze o pojemności *C* naładowanym do napięcia *u* przyjmuje postać:

$$W = \frac{C \, u^2}{2} \tag{6.3.1.10}$$

a wyrażenie na energię zgromadzoną na kondensatorze o pojemności C naładowanym ładunkiem q

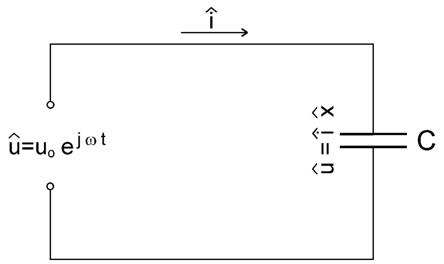
$$W = \frac{q^2}{2C} \tag{6.3.1.11}$$

6.3.2. Prąd przemienny

Zjawiska związane z prądem przemiennym dają się opisywać - podobnie jak drgania harmoniczne – z wykorzystaniem reprezentacji funkcjami zespolonymi. Zastosowanie reprezentacji zespolonej pozwala na zastosowanie zasad rozwiązywania obwodów prądu stałego do rozwiązywania obwodów prądu przemiennego. W przypadku prądu przemiennego pojęcie oporności nabiera innego znaczenia, bowiem wielkość, która stanowi współczynnik proporcjonalności w prawie Ohma, w przypadku prądu przemiennego odnosi się nie tylko do oporników, ale również do kondensatorów i cewek indukcyjnych. Oporność pojemnościowa i oporność indukcyjna definiowana jest podobnie jak tradycyjna oporność – rezystancja. Użycie reprezentacji zespolonej determinuje następującą definicję oporności:

$$\hat{x} = \frac{d\hat{u}}{d\hat{i}} \tag{6.3.2.1}$$

W celu wyznaczenia oporności pojemnościowej (zwanej fachowo reaktancją pojemnościową) należy rozważyć obwód kondensatora podłączonego do napięcia prądu przemiennego (rys. 6.3.2.1).



Rys. 6.3.2.1. Kondensator jako reaktancja pojemnościowa.

W wyrażeniu .. zarówno napięcie, jak natężenie są funkcjami czasu. Dlatego w mianowniku i liczniku w miejsce różniczek można wstawić pochodne czasu.

$$\hat{x} = \frac{\frac{d\hat{u}}{dt}}{\frac{d\hat{i}}{dt}} \tag{6.3.2.2}$$

Pochodną w liczniku wyliczamy jako pochodną napięcia na źródle, które jest takie samo jak napięcie na kondensatorze, ale z przeciwnym znakiem (na podstawie prawa Kirchhoffa). Natomiast pochodną mianownika obliczamy uwzględniając najpierw definicję natężenia prądu w reprezentacji zespolonej ($\hat{i} = \frac{d\hat{q}}{dt}$), następnie definicję pojemności w reprezentacji zespolonej ($C = \frac{d\hat{q}}{d\hat{u}}$).

$$\hat{x} = \frac{u_o\, j\,\omega\, e^{j\omega t}}{\frac{d^2\hat{q}}{dt^2}} = \frac{u_o\, j\,\omega\, e^{j\omega t}}{\frac{d^2(C\hat{u})}{dt^2}} = \frac{u_o\, j\,\omega\, e^{j\omega t}}{C\, u_o\, jj\,\omega^2\, e^{j\omega t}} \tag{6.3.2.3}$$

W efekcie otrzymujemy zespolony zapis oporności pojemnościowej postaci algebraicznej

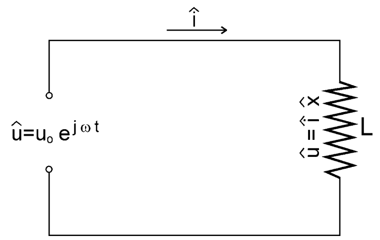
$$\hat{x} = \frac{-j}{\omega C} \tag{6.3.2.4}$$

W reprezentacji zespolonej w postaci wykładniczej zapis oporności jest następujący:

$$\hat{x} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} \tag{6.3.2.5}$$

Powyższy wywód zmierzający do ustalenia zapisu oporności pojemnościowej można, w przypadku oporności indukcyjnej, przeprowadzić w analogiczny sposób. W tym przypadku w miejsce pochodnej w mianowniku wstawia się wyrażenie uzyskane z prawa indukcji wyrażającego siłę elektromotoryczną indukowaną na cewce w chwili gdy prąd w cewce zmienia się, czyli pochodna natężenia prądu nie jest zerowa ($\hat{\varepsilon} = -L\frac{d\hat{i}}{dt}$).

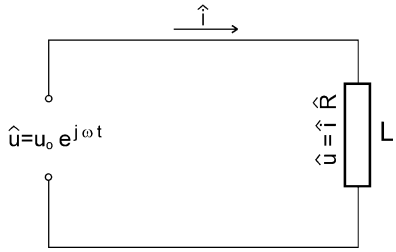
$$\hat{x} = \frac{u_o\, j\,\omega\, e^{j\omega t}}{\frac{d\hat{i}}{dt}} = \frac{u_o\, j\,\omega\, e^{j\omega t}}{\frac{1}{L}\, u_o\, e^{j\omega t}} = j\omega L = \omega L\, e^{j\frac{\pi}{2}} \tag{6.3.2.6}$$



Rys. 6.3.2.2. Cewka jako reaktancja indukcyjna.

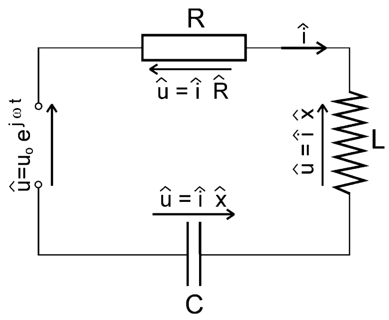
Przypadek oporności znajdującej się w obwodzie prądu przemiennego można zaliczyć do przypadków trywialnych, ale w celu zachowania porządku formalnego wyprowadźmy wyrażenie na tę oporność w reprezentacji zespolonej.

$$\hat{x} = \frac{u_o\ j\,\omega\, e^{j\omega t}}{\frac{d\hat{i}}{dt}} = \frac{u_o\ j\,\omega\, e^{j\omega t}}{\frac{1}{R}\,\frac{d\hat{u}}{dt}} = R = R\, e^{j\,0} \qquad (6.3.2.7)$$



Rys. 6.3.2.3. Reprezentacja zespolona spadku napięcia na rezystorze.

Dla przykładu obliczmy *zastępczą oporność w reprezentacji zespolonej* (zwanej *impedancją* $\hat{z}$) w przypadku trzech połączonych w szereg następujących elementów: rezystora, cewki indukcyjnej i kondensatora (R-L-C).



Rys. 6.3.2.4. Szeregowy obwód R-L-C.

$$\hat{z} = [R + j\,0] + [0 + j\omega L] + [0 - \tfrac{j}{\omega C}] = R + j(\omega L - \tfrac{1}{\omega C}) = \sqrt{R^2 + (\omega L - \tfrac{1}{\omega C})^2}\ e^{j\,\mathrm{arctg}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}} \qquad (6.3.2.7)$$

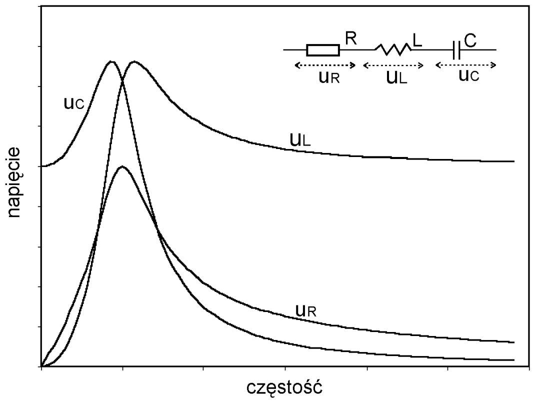
Jeśli elementy R, L i C połączyć równolegle (R||L||C), wówczas:

$$\hat{z} = \frac{1}{\frac{1}{R+j0} + \frac{1}{0+j\omega L} + \frac{1}{0-\frac{j}{\omega C}}} = \frac{1}{\frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L} + j\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})} =$$

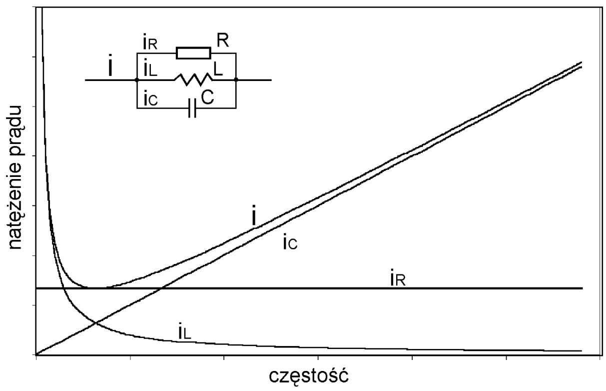
$$= \frac{\frac{1}{R} - j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} + j\frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{R}\right)^2}{\left(\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2\right)^2} + \frac{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}{\left(\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2\right)^2}}\ \exp\left[j \operatorname{arctg} \frac{\left(\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2\right)\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)}{\frac{1}{R}\left(\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2\right)} \right]$$

Kształty zależności napięć na szeregowo połączonych elementach R-L-C od częstości oscylacji napięcia na wejściu układu są zdeterminowane konfiguracją wartości R, L i C. Przykład takich zależności pokazano na rys. 6.3.2.5.



Rys. 6.3.2.5. Napięcia na elementach R-L-C.



Rys. 6.3.2.6. Prądy płynące w elementach R||L||C.

Kształty zależności natężeń prądów przepływających przez równolegle połączone elementy R||L||C również zdeterminowane konfiguracją wartości R, L i C (rys. 6.3.2.6).