



$$d\lambda \frac{c_1 c^{-5} \nu^5}{\exp(\frac{c_2 \nu}{cT}) - 1} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\exp(\frac{c_2}{\lambda T}) - 1} d\lambda \quad (3.3)$$

W powyższym wyrażeniu po lewej stronie w miejsce  $d\lambda$  należy podstawić różniczkę otrzymaną z pochodnej długości fali po częstotliwości:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow \frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^2} \Rightarrow d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu \quad (3.4)$$

$$-\frac{c}{\nu^2} d\nu \frac{c_1 c^{-5} \nu^5}{\exp(\frac{c_2 \nu}{cT}) - 1} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\exp(\frac{c_2}{\lambda T}) - 1} d\lambda \quad (3.5)$$

$$-\frac{c_1 c^{-4} \nu^3}{\exp(\frac{c_2 \nu}{cT}) - 1} d\nu = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\exp(\frac{c_2}{\lambda T}) - 1} d\lambda \quad (3.6)$$

Otrzymujemy wyrażenie przedstawiające spektralną zdolność emisyjną w funkcji częstotliwości:

$$E(\nu, T) = \frac{c_1 c^{-4} \nu^3}{1 - \exp(\frac{c_2 \nu}{cT})} \quad (3.7)$$

Stałe  $c_1$  i  $c_2$  wyraża się za pomocą stałych uniwersalnych:

$$c_1 = 2 \pi h c^2$$

$$c_2 = h c k^{-1}$$

gdzie:  $c$  – szybkość światła

$k$  – stała Boltzmana

$h$  – stała Plancka

W efekcie zastosowania powyższych stałych otrzymujemy wyrażenia:

$$E(\lambda, T) = 2\pi h c^2 \frac{\lambda^{-5}}{\exp(\frac{hc}{kT\lambda}) - 1} \quad (3.8)$$

$$E(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{1 - \exp(\frac{h\nu}{kT})} \quad (3.9)$$

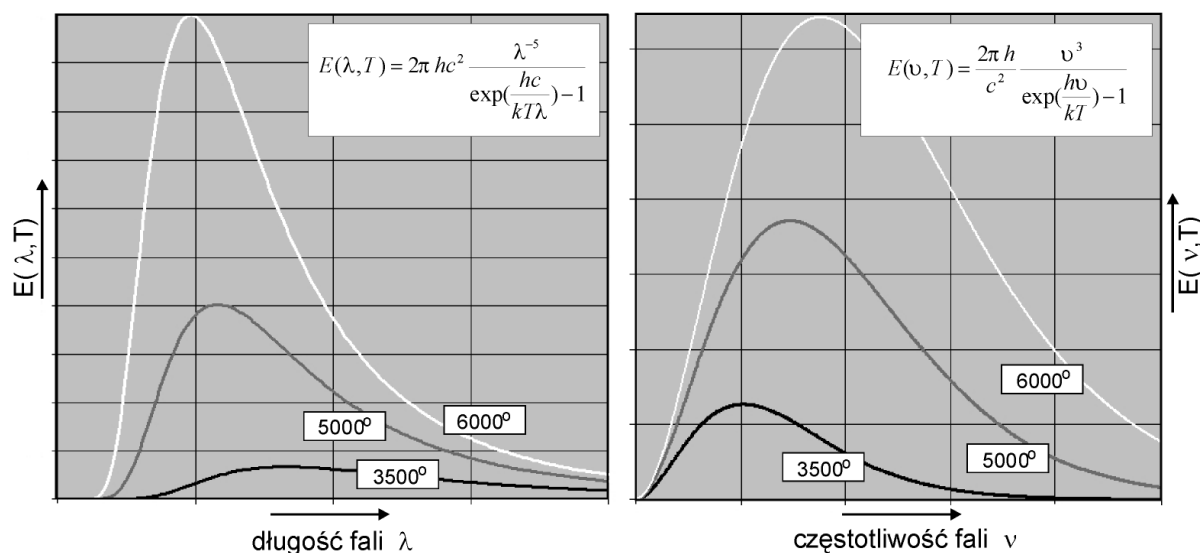
Wyrażenia 3.8 i 3.9 pozwalają wyliczyć moc  $P(\lambda_1 \rightarrow \lambda_2)$  emitowaną z jednostki powierzchni w granicach długości fal od  $\lambda_1$  do  $\lambda_2$ :

$$P(\lambda_1 \rightarrow \lambda_2) = 2\pi h c^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda^{-5}}{\exp(\frac{hc}{kT\lambda}) - 1} d\lambda \quad (3.10)$$

$$P(\lambda_1 \rightarrow \lambda_2) = \frac{2\pi h}{c^2} \int_{\frac{c}{\lambda_1}}^{\frac{c}{\lambda_2}} \frac{\nu^3}{1 - \exp(\frac{h\nu}{kT})} d\nu \quad (3.11)$$

Jeżeli zamierzamy wyliczyć moc  $P(\nu_1 \rightarrow \nu_2)$  emitowaną z jednostki powierzchni w granicach częstotliwości od  $\nu_1 \rightarrow \nu_2$  w wyrażeniu 3.11 należy zmienić znak, co skutkuje bardziej naturalnym niż powyżej sposobem całkowania (chodzi o granice całkowania):

$$P(\nu_1 \rightarrow \nu_2) = \frac{2\pi h}{c^2} \int_{\nu_2}^{\nu_1} \frac{\nu^3}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1} d\nu \quad (3.12)$$



Rys. 3.2. Przykładowe widma zdolności emisyjnej ciała doskonale czarnego.

Rozkład Plancka pozwala wyznaczyć zależność całkowitej zdolności emisyjnej od temperatury, którą jest całką ze zdolności emisyjnej po wszystkich długościach fali. Wartość tej całki jest proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury, co stanowi potwierdzenie ustalonego wcześniej empirycznego prawa Stefana-Boltzmana (1.15). Rozkład Plancka umożliwia także wykazanie słuszności prawa przesunięć Viena (1.16). Obydwa te fakty w znakomity sposób potwierdzają powagę teorii Plancka. Właśnie dlatego, mimo jej sprzeczności z ówczesnie mocno ugruntowaną fizyką klasyczną, postulat Plancka i jego dalsze następstwa - jak np. wytłumaczenie zjawiska fotoelektrycznego, czy wytwarzanie promieniowania Rentgenowskiego - trzeba było na początku XX wieku przyjąć i włączyć do nauki. Max Planck otrzymał w roku 1918 nagrodę Nobla za wprowadzenie pojęcia kwantu energii.

### 3.2. Zjawisko fotoelektryczne – postulat Einsteina odnośnie kwantowej natury światła

Historycznie występowanie zjawiska fotoelektrycznego należy wiązać z doświadczeniami Francka Hertza nad wytwarzaniem fal elektromagnetycznych (1887 r.), podczas których w trakcie uruchamiania iskrownika zauważył jego lepsze działanie (łatwiejsze wyładowanie elektryczne) po oświetleniu światłem ultrafioletowym. Efekt fotoelektryczny precyzyjnie opisał Philip Lenard w roku 1902, wykazując, że z powierzchni wypolerowanego metalu pod wpływem światła emitowane są elektrony.

**W roku 1904 Albert Einstein odwrócił postulat Plancka postulując, że metal, a właściwie znajdujące się w nim swobodne elektrony, pochłaniają promieniowanie porcjami energii proporcjonalnymi do częstotliwości tego promieniowania**

Einstein sformułował równanie bilansujące energię w zjawisku fotoelektrycznym:

$$h\nu = W + E_k \quad (3.13)$$

$h\nu$  - energia przejęta przez elektron w metalu

$W$  - praca wyjścia, energia zużyta na pokonanie przyciągania elektrostatycznego między elektronem a miejscem przez niego opuszczonym (elektron zmieniając położenie unosi ze sobą ładunek ujemny, zatem „pozostawia” po sobie przestrzeń naładowaną dodatnio)

$E_k$  - energia kinetyczna fotoelektronu swobodnie poruszającego się w przestrzeni

W roku 1905 Einstein rozszerzył swój postulat do postaci następującej:

**Światło rozchodzi się w postaci elementarnych porcji (kwantów) energii o wartości takiej samej, jaka wynika z postulatu Plancka**

Takie kwanty energii Einstein nazwał **fotonami**. Podejście to bardzo kłóciło się z ówczesnym rozumieniem natury światła, ponieważ uważano je wtedy za falę elektromagnetyczną. A dowody na falową naturę światła wydawały się oczywiste – światło ulega przecież dyfrakcji i interferencji, daje się spolaryzować, można wyznaczyć jego długość. Zresztą sam Einstein uważał wówczas swój postulat za czysto spekulatywny i pozbawiony uzasadnienia ontologicznego.

Teoria Einsteina odnośnie natury zjawiska fotoelektrycznego została pozytywnie zweryfikowana przez Roberta Millikana, który w latach 1912-1915 na Uniwersytecie w Chicago zrealizował projekt polegający na wyznaczeniu

stałej Plancka za pomocą fotokomórki. W metodzie wyznaczania stałej Plancka wykorzystane jest równanie, które zwykle określa się jako równanie Einsteina-Millikana:

$$h \frac{c}{\lambda} = W + U_o e \quad (3.14)$$

$h \frac{c}{\lambda}$  energia fotonu, która przekazana została elektronowi swobodnemu w metalu;  
 $\frac{c}{\lambda}$  - częstotliwość fali światła

$W$  praca wyjścia

$U_o e$  energia (praca) hamowania;  $U_o$  – napięcie odcięcia (napięcie hamowania, przy jakim natężenie fotoprądu maleje do wartości zerowej)

Zależność 3.14 przekształcona do postaci:

$$\frac{U_o e}{c} = -\frac{W}{c} + h \frac{1}{\lambda} \quad (3.15)$$

wskazuje na możliwość wyznaczenia stałej Plancka poprzez odczyt nachylenia prostej na wykresie

$$\text{zależności } \frac{U_o e}{c} \text{ od } \frac{1}{\lambda}.$$

Za wytłumaczenie zjawiska fotoelektrycznego Albert Einstein otrzymał w roku 1921 nagrodę Nobla. Natomiast za doświadczalne potwierdzenie słuszności hipotezy Einsteina, a także za pomiar ładunku elementarnego Robert Millikan otrzymał nagrodę Nobla w roku 1923.

### 3.3. Lampa rentgenowska – postulat interpretacyjny

Trudno ustalić, kto jest odkrywcą efektu powstawania promieni rentgenowskich. Bezsprzecznie do czynienia z tego rodzaju promieniowaniem miał w roku 1892 William Crookes, uczony angielski, który zauważył, że osłonięte przed światłem klisze fotograficzne ulegały zaczernieniu podczas wytwarzania promieniowania katodowego. Jednak Crookes efektu tego nie kojarzył z występowaniem promieniowania innego niż katodowe – właściwie nie zainteresował się wówczas dostatecznie mocno tym efektem, bowiem nikt nie przypuszczał, że promieniowanie wytwarzane w wyładowczej rurze Crookesa może mieć naturę różnorodną. W roku 1895 Eugene Goldstein wykrył tak zwane promieniowanie kanalikowe (obecnie wiemy, że to protony). Dlatego Roentgen był w stanie przypuszczać, że w promieniowaniu wytwarzanym w rurze Crookesa może wytwarzać się promieniowanie jeszcze inne niż katodowe i kanalikowe. Przekonał się o tym, gdy zauważył, że ów bardzo przenikliwy rodzaj promieniowania nie odchyła się w polu magnetycznym, tak jak elektrony (czyli właściwe promieniowanie katodowe), albo protony (promieniowanie kanalikowe, zwane również promieniowaniem anodowym). Jeszcze w roku 1892 Nikola Tesla badał przenikliwość promieni katodowych (nie zdawał sobie jeszcze sprawy, że ma do czynienia ze szczególnym rodzajem promieniowania), przypuszczał, że będzie je można użyć do badania wnętrza człowieka. Tesla wykonywał zdjęcia „prześwietlanych” przedmiotów. Recenzenci czasopism naukowych nie zakwalifikowali jego doniesień do druku, jako słabo udokumentowane. Tesla wysłał owe zdjęcia między innymi do Wuerzburga w Niemczech do Roentgena, który pracował jako profesor fizyki na Julius-Maximilians-Universitaet of Wuerzburg, a zajmował się wówczas fotografowaniem i badaniem promieniowania katodowego (tak zostało nazwane przez Eugene Goldsteina w roku 1987 r. promieniowanie pochodzące z katody). Roentgen, gdy 8 grudnia 1895 r. przypadkowo spostrzegł na luminezującym ekranie układ kostny swojej dłoni, natychmiast spróbował naświetlić na kliszy fotograficznej obraz układu kostnego (przypomniały mu się listy od Nikoli Tesli). W tym celu poprosił swoją żonę żeby zbliżyła dłoń do kasyety z nie naświetloną kliszą fotograficzną – i udało mu się to 22 grudnia. Na fotografii było widać kości dłoni oraz pierścionek (rys. 3.3).



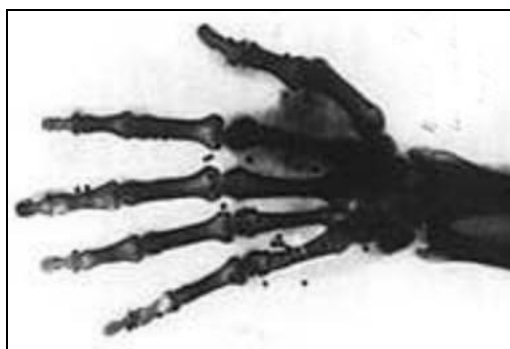
Rys. 3.3. Pierwszy „rentgenogram” - zdjęcie dłoni Berthy Roentgena z grudnia 1895 r.

Roentgen podczas świąt Bożego Narodzenia przygotował artykuł pt. "Uber eine neue Art von Strahlen" [ang.: "About a new kind of rays"], w którym opisał nowy rodzaj promieniowania i 28 grudnia 1895 r. przekazał maszynopis do redakcji *Proceedings of the Würzburg Physical-Medical Society*. W dzień Nowego Roku 1896 grudniowy numer czasopisma ukazał się; Roentgen wysłał egzemplarze wraz ze zdjęciem zrobionym 22 grudnia (rys. 3.3) i życzeniami świąteczno-noworocznymi do znajomych naukowców z 6 ośrodków naukowych. Już po kilku dniach nadeszła depecha z pałacu cesarskiego w następstwie której, w dniu 13 stycznia w Berlinie, w obecności cesarza Wilhelma II, Roentgen wyjaśniała istotę swojego odkrycia. Na tę okazję przygotował nowy - lepszy „radiogram” dłoni swojej żony (rys. 3.4).



Rys. 3.4. Żona Rentgena – Bertha oraz jej „historyczna” dłoń zaprezentowana cesarzowi Wilhelmowi II w dniu 13 stycznia 1896 r.

Natomiast po dziesięciu dniach - 23 stycznia - w Towarzystwie Fizyczno-Medycznym w Wuerzburgu (*Physikalisch-Medizinischen Gesellschaft in Würzburg*) odbył się praktyczny pokaz wykonania takiego „rentgenogramu”. Została „prześwietlona” dłoń profesora anatomii Alberta von Kollikera (rys. 3.5). Klisza po wywołaniu, utrwaleniu i wypłukaniu została po kilku minutach pokazana uczestnikom spotkania (entuzjazm uczestników oczywisty), a von Kolliker zaproponował, aby nowoodkryty rodzaj promieniowania nazwać **promieniami Rentgena**. Już w następnych tygodniach technikę rentgenowską zaczęto stosować w niemieckich szpitalach wojkowych.



Rys. 3.5. Dłoń profesora anatomii Alberta von Kollikera prześwietlona *in statu nascendi* na posiedzeniu Towarzystwa Fizyczno-Medycznego 23 stycznia 1896 w Wuerzburgu

Tak jak w zjawisku fotoelektrycznym nie znana jest przyczyna tego iż niektóre hipotetyczne „einsteinowskie” fotony przekazują swoją energię hipotetycznym swobodnym elektronom w metalu, tak w lampie rentgenowskiej nie wiadomo, dlaczego

**niektóre promienie katodowe (rozpędzone polem elektrycznym elektrony) uderzając w anodę, i wytracając przy tym swoją energię, przekształcają ją częściowo lub całkowicie w energię fotonu X**

Skutkujący takim postulatem interpretacyjnym następujący bilans energii:

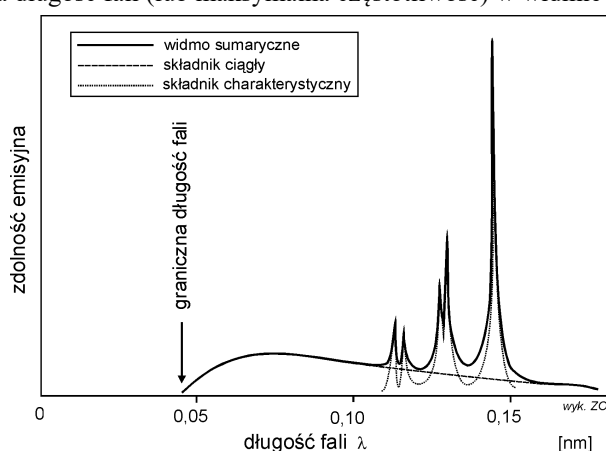
$$U - e = Q + \frac{hc}{\lambda} \quad (3.16)$$

gdzie:  $U$  – napięcie elektryczne przyłożone do rury Crookesa (lampy rentgenowskiej)  
 $e$  – ładunek elektronu  
 $Q$  – ciepło wydzielone w wyniku uderzenia elektronu w anodę  
 $hc/\lambda$  – energia wytworzonego fotonu X

a właściwie wynikający z niego wniosek o granicznej długości fali, potwierdza się w praktyce. Z graniczną długością fali mamy do czynienia w przypadku, gdy energia kinetyczna elektronu przekształca się całkowicie w energię fotonu:

$$U - e = 0 + \frac{hc}{\lambda_g} \Rightarrow \lambda_g = \frac{hc}{Ue} \quad (3.17)$$

Dystrybucja energii kinetycznej elektronu pomiędzy efekt cieplny i wyemitowany foton nie jest czymkolwiek zdeterminowana - jest to proces w pełni statystyczny. Biorąc pod uwagę związek pomiędzy graniczną długością fali a napięciem na lampie rentgenowskiej łatwo jest zrozumieć, że graniczna długość fali w promieniowaniu rentgenowskim, to minimalna długość fali (lub maksymalna częstotliwość) w widmie promieniowania.



Rys. 3.6. Widmo promieniowania rentgenowskiego.

W widmie promieniowania rentgenowskiego (rys. 3.6) oprócz składnika ciągłego, w wypadku dostatecznie wysokiego napięcia pojawia się składnik dyskretny, tzw. widmo charakterystyczne.

Przenikliwość promieni rentgenowskich jest różna dla różnych materiałów i jest tym większa, im krótsza długość fali. Kształt widma ciągłego zależy od materiału, z jakiego wykonana jest katoda. Natomiast graniczna długość fali zależy wyłącznie od napięcia. Pojawienie się składnika charakterystycznego nie daje się wytłumaczyć na gruncie wczesnej teorii kwantów. Do tego potrzebna jest teoria poziomów energetycznych atomów (rozdz. 4).

Znaczenie wprowadzenia technik rentgenograficznych do medycyny oraz zastosowanie ich w różnych dziedzinach nauki wpłynęło na ustanowienie nagrody Nobla w dziedzinie fizyki. W roku 1901, pierwsza nagroda w dziedzinie fizyki przypadła właśnie Wilhelmowi Conradowi Rentgenowi.

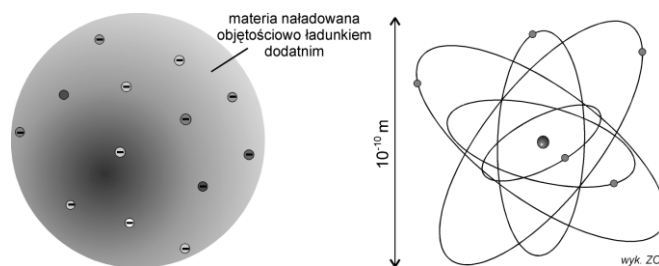
### 3.4. Postulaty odnośnie budowy atomu

J. J. Thomson zaproponował w roku 1904 model budowy atomu, zgodnie z którym ujemnie naładowane elektrony znajdują się wewnątrz zamkniętego obszaru wypełnionego w sposób ciągły ładunkiem dodatnim (przywoływana jest tu analogia „ciasta z rodzynkami”). Ładunek dodatni tworzy wg Thomsona kulę o promieniu rzędu  $10^{-10}$  m. W kuli tej ładunki ujemne są rozłożone równomiernie.

W atomie znajdującym się w stanie o najniższej energii elektrony były nieruchome. Natomiast w atomach o wyższej energii, tzn. w atomach wzbudzonych (np. w wysokiej temperaturze) elektrony wykonywałyby drgania wokół położenia równowagi.

Z elektrodynamiki wiadomo, że drgający elektron (oscylator atomowy) wysyłałby promieniowanie i w ten sposób model Thomsona wyjaśnia emisję promieniowania przez wzbudzone atomy. Jednak zgodności ilościowej z doświadczeniem nie uzyskano.

Dowód niepoprawności modelu Thomsona otrzymał w 1911 r. jego uczeń Ernest Rutherford analizując wyniki rozpraszania cząstek  $\alpha$  na atomach.



Rys. 3.7. Model atomu wg Thomsona i Rutherforda

Z przeprowadzonej przez Rutherforda analizy wynikało, że ładunek dodatni nie jest rozłożony równomiernie wewnątrz atomu, ale skupiony w małym obszarze zwanym *jądrem* (o rozmiarze rzędu  $10^{-14}$  -  $10^{-15}$  m). Model jądrowy atomu zaproponowany przez Rutherforda znalazł potwierdzenie w wielu eksperymentach. Zgodnie z tym modelem można sformułować następujące postulaty:

**W środku atomu znajduje się jądro  
o masie w przybliżeniu równej masie całego atomu**

**Ładunek jądra jest równy iloczynowi liczby atomowej  $Z$  i ładunku  $e$**

**Wokół jądra znajduje się  $Z$  elektronów, tak że cały atom jest obojętny**

Ważnym problemem pozostało wyjaśnienie stabilności takiego atomu. Elektrony nie mogą być nieruchome, ponieważ w wyniku przyciągania z dodatnim jądrem zostałyby do niego przyciągnięte. Jeżeli zatem dopuścić ruch elektronów wokół jądra (tak jak planety wokół Słońca) to natrafiamy na trudność interpretacyjną. Krążący elektron doznaje stałe przyspieszenia (dośrodkowego) i zgodnie z elektrodynamiką klasyczną wysyła energię kosztem swojej energii mechanicznej. Oznaczałoby to, że poruszałyby się po spirali ostatecznie spadając na jądro.

Problem stabilności atomów doprowadził do powstania nowego modelu zaproponowanego przez Nielsa Bohra (rozdz. 3.6). Jednakże podstawową, pozytywną cechą modelu Bohra było to, że model ów umożliwiał przewidywanie występowania określonych widm promieniowania wysyłanego przez atomy.

### 3.5. Serie widmowe

Widma promieniowania atomów wodoru znane już były w latach osiemdziesiątych XIX w. Pierwsze obserwacje linii widmowych oraz ustalenia długości fal, jakim te linie odpowiadają, zostały przeprowadzone przez Johana Jacoba Balmera. Balmer w roku 1885 ustalił empiryczną formułę (3.18) pozwalającą powyciszać długości fal w widmie promieniowania atomu wodoru.

$$\lambda = 3645,6 \frac{n^2}{n^2 - 2^2} \quad (3.18)$$

$n$  - liczba naturalna większa od 2

W roku 1890 Johannes Robert Rydberg formułę Balmera podał w innej postaci (3.19):

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (3.19)$$

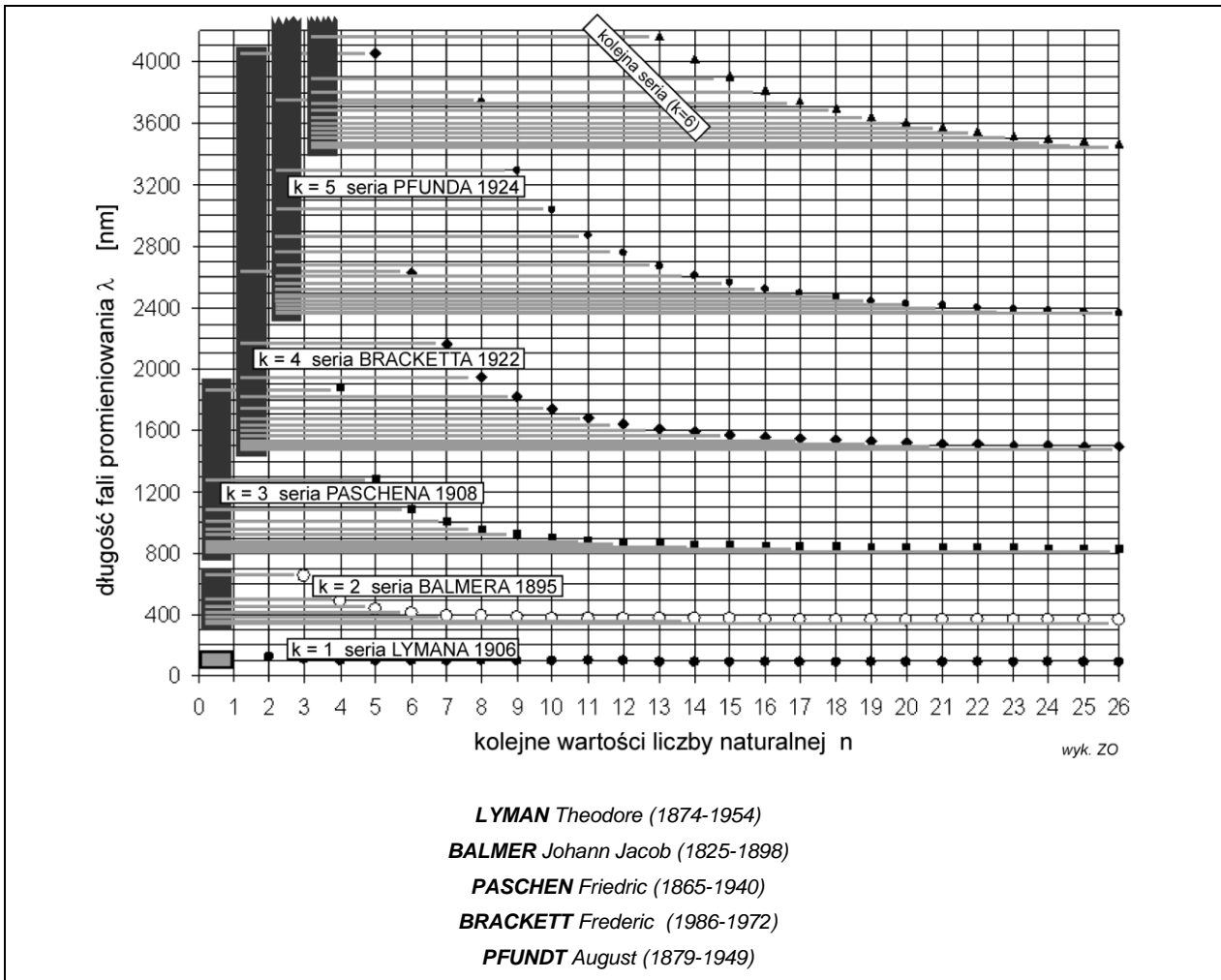
Litera  $R$  – tzw. stała Rydberga – posiada wartość równą  $10972000 \text{ m}^{-1}$ .

Dzięki zastosowaniu kliszy fotograficznej możliwa była obserwacja nie tylko w zakresie widzialnym. Formuła 3.19 została rozszerzona tak, że spełniała wyniki analiz długości także w zakresie podczerwieni oraz w nadfiolecie:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (3.20)$$

$n > k$

Do roku 1908 uzyskano szereg serii widmowych, którym nadano nazwy pochodzące od nazwisk ich odkrywców. Jeżeli w formule 3.20  $k = 1$ , to dla kolejnych wartości  $n$  (czyli 2, 3, 4, 5, itd.) powyciszone mogą być długości fal w serii widmowej Lymana. Jeżeli  $k = 3$ , otrzymujemy serię długości fal Paschena. Jeżeli  $k = 4$  – Bracketta,  $k = 5$  – Pfundta, itd. Seria Lymana mieści się w ultrafiolecie, natomiast serie Paschena, Bracketta, Pfundta itd. – w podczerwieni.



Rys. 3.8. Długości fal w widmie wodoru obliczone z formuły Balmera-Rydberga.

### 3.6. Atom Bohra

Problem upadku elektronów na jądro atomu w modelu Rutherforda został rozwiązany przez Nielsa Bohra poprzez wprowadzenie w roku 1913 dwóch postulatów. Pierwszy postulat Bohra odnosi się do elektronów w orbitalnym modelu Rutherforda:

**Wartość momentu pędu elektronu krążącego po orbicie atomu wodoru jest równa wielokrotność stałej Plancka  $\hbar$**

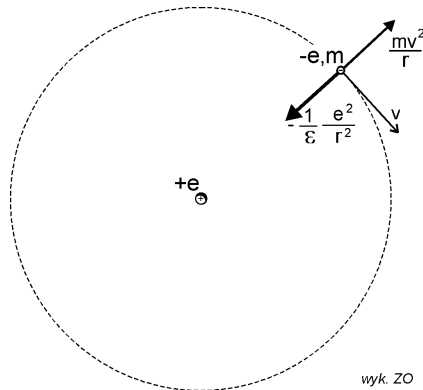
$$L = n \hbar$$

Litera  $\hbar$  ( $h$  kreślnie) - to stała Plancka  $h$  podzielona przez  $2\pi$ .

Powyższy postulat znajduje konsekwencję zarówno w wyrażeniu przedstawiającym promień orbity, jak i na wyrażenie przedstawiające energię atomu.

Promień orbity można wyznaczyć posługując się prostą zasadą - z przyrównania siły dośrodkowej z siłą odśrodkową. W tomie wodoru siłą dośrodkową jest siła elektrostatycznego oddziaływania pomiędzy jądrem (protonem) a elektronem (rys. 3.8). Oddziaływanie grawitacyjne protonu i elektronu można pominąć jako bardzo małe.





Rys. 3.8. Planetarne wyobrażenie atomu wodoru.

Pierwszy postulat Bohra oraz równanie otrzymane z przyrównania siły odśrodkowej z dośrodkową (3.21), pozwalają wyznaczyć wyrażenie na promień orbity w atomie wodoru. W tym celu postulat Bohra należy włączyć do równania sił. Najłatwiej to osiągnąć przez rozszerzenie ułamka - jakim jest wyrażenie na siłę odśrodkową – i to tak, aby w liczniku pojawiło się wyrażenie na momentu pędu w potęgce drugiej:

$$\frac{mv^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e^2}{r^2} \tag{3.21}$$

$$\frac{mr^2}{mr^2} \frac{mv^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e^2}{r^2} \tag{3.22}$$

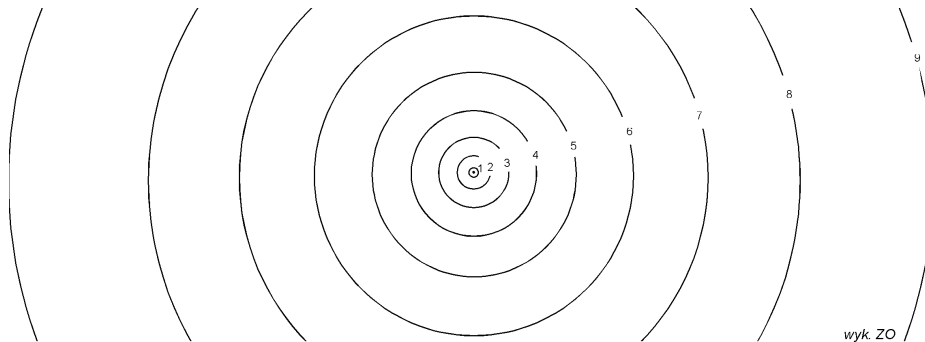
Do wyrażenia w takiej postaci wystarczy w miejsce licznika wstawić prawą stronę formuły wyrażającej postulat Bohra ( $n^2 \hbar^2$ ):

$$\frac{n^2 \hbar^2}{4\pi^2 mr^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e^2}{r^2} \tag{3.23}$$

Otrzymuje się zatem wyrażenie na promień orbity:

$$r = \frac{\epsilon \hbar^2}{\pi m e^2} n^2 \tag{3.24}$$

Wyrażenie .. informuje, że w atomie wodoru wg Bohra promień orbity może przyjmować ściśle określone wartości. Jeżeli promieniom orbit nada się numery, wtedy widzimy, że promień orbity jest proporcjonalny do kwadratu owego numeru (co ilustruje rysunek 3.9).



Rys. 3.9. Położenie dozwolonych orbit w atomie wodoru wg Plancka

Jak pokazuje rys ... orbity o coraz wyższych numerach są coraz bardziej od siebie oddalone.

Jak wspomniano, pierwszy postulat Bohra oddziałuje na wartości energii układu proton-elektron, czyli - po prostu - atomu wodoru. Energia takiego układu jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej”:

$$E = E_k + E_p \tag{3.25}$$

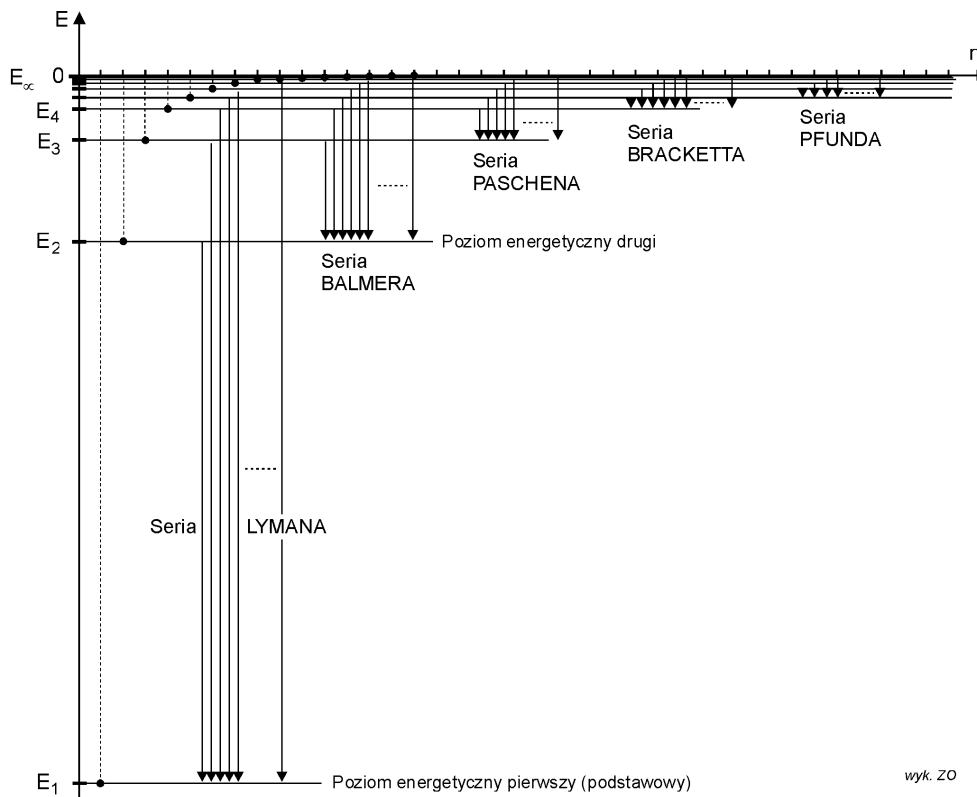
Energia kinetyczna wyraża się jak zawsze jako  $mv^2/2$ , natomiast energia potencjalna to energia układu dwóch ładunków, protonu i elektronu:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e^2}{r} \tag{3.26}$$

Postulat Bohra można uwzględnić najprościej przez rozszerzenie ułamka wyrażającego energię kinetyczną (podobnie jak podczas wyprowadzania formuły na promień orbity) i przez wstawienie wyrażenia na promień

borowski (3.24) w miejsce promienia  $r$  w składniku wyrażającym energię potencjalną. Otrzymuje się wówczas funkcję wyrażającą zależność energii atomu wodoru od numeru orbity, na jakiej elektron krąży w tym stanie energetycznym atomu:

$$E = -\frac{me^4}{8\varepsilon^2 h^2} \frac{1}{n^2} \quad (3.27)$$



Rys. 3.8. Powstawanie serii widmowych w atomie wodoru

Zależność energii atomu w funkcji numeru orbity przedstawia wyrażenie 3.27. zobrazowane jako wykres na rysunku 3.8. Oś pionową na tym rysunku traktuje się jako diagram poszczególnych wartości energii dozwolonych dla atomu wodoru. Od wartości tych prowadzone są linie poziome, określane jako poziomy energetyczne. Bohr wprowadził drugi postulat:

**podczas zmiany poziomu energetycznego z wyższego na niższy następuje emisja fotonu o energii równej różnicy tych poziomów**

Zgodnie z powyższym postulatem w momencie przeskoku elektronu z orbity  $k$  na orbitę  $n$  następuje emisja fotonu o energii:

$$E_f = E_k - E_n = \frac{me^4}{8\varepsilon^2 h^2} \frac{1}{k^2} - \left(-\frac{me^4}{8\varepsilon^2 h^2} \frac{1}{n^2}\right) = \frac{me^4}{8\varepsilon^2 h^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right) \quad (3.28)$$

Powyzsze wyrażenie – następstwo postulatów Bohra - jest odzwierciedleniem formuły Balmera-Rydberga. Teoria Bohra okazała się zatem pozostawać w zgodzie z praktyką! Ponadto dostrzegamy, że stała Rydberga daje się wyrazić za pomocą stałych fizycznych (3.29):

$$R = \frac{me^4}{8\varepsilon^2 h^2} \quad (3.29)$$

### 3.7. Dualizm korpuskularno-falowy

Dualizm korpuskularno-falowy to pogląd, iż fala elektromagnetyczna może być utożsamiana z poruszającą się cząstką i na odwrót, poruszająca się cząstka może być utożsamiana jako fala. Najbardziej znanym doświadczeniem wykazującym korpuskularną naturę promieniowania jest doświadczenie Comptona, w którym fala elektromagnetyczna o długości z zakresu promieniowania rentgenowskiego zderzając się z elektronem wykazuje naturę falową. Trzeba wyraźnie podkreślić, że natura ta wcale nie wynika z obserwacji, ale jest przeświadczeniem, jakiego doznajemy widząc zgodność aparatu rachunkowego użytego do opisu zjawiska z wynikami pomiarów. W

analizie rachunkowej zakłada się, że promienie rentgenowskie zderzają się ze swobodnymi elektronami w naświetlanej folii metalowej tak samo, jak zderzają się kulki doskonale sprężyste. Wiadomo, że w zderzeniach sprężystych nie wydziela się ciepło - po prostu cała energia kinetyczna kwantu rentgenowskiego przed zderzeniem jest równa sumie energii kinetycznych rozproszonego kwantu rentgenowskiego i odrzuconego elektronu, a pęd fotonu przed zderzeniem jest równy sumie pędów rozproszonego fotonu i odrzuconego elektronu.

Dualizm korpuskularno falowy jest wyrażony dwoma zapisanymi niżej działaniami.

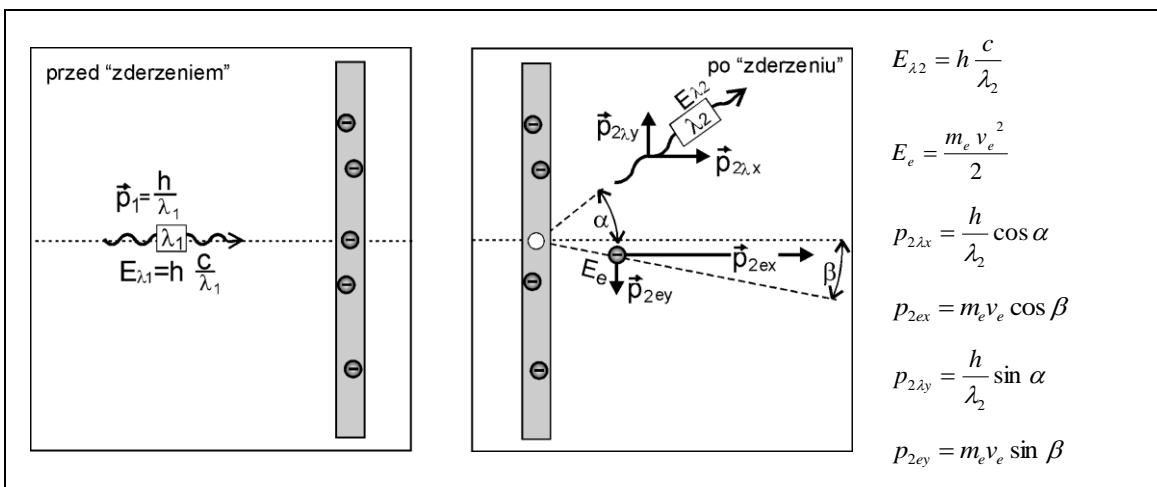
$$\text{Po pierwsze : } p_\lambda = \frac{h}{\lambda} \quad (3.30)$$

co oznacza, że pęd fotonu  $p_\lambda$ , uważanego jednocześnie za falę o długości  $\lambda$ , to stała Plancka przez długość fali.

$$\text{Po drugie : } \lambda_p = \frac{h}{p} \quad (3.31)$$

co oznacza, że długość  $\lambda_p$  fali, uważanej jednocześnie za cząstkę o pędzie  $p$ , to stała Plancka przez pęd tej cząstki. Pęd rozumiany jest tu w sensie relatywistycznym:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.32)$$



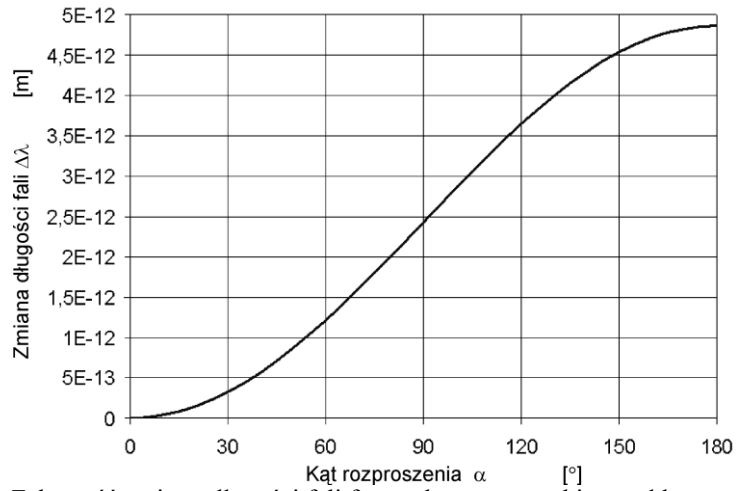
Rys. 3.9. Efekt Comptona.

Tab. 3.1. Bilans energii i pędu w zderzeniu komptonowskim

$h \frac{c}{\lambda_1} = h \frac{c}{\lambda_2} + \frac{m_e v_e^2}{2}$	Energia
$\frac{h}{\lambda_1} = \frac{h}{\lambda_2} \cos \alpha + m_e v_e \cos \beta$	Pęd – składowa pozioma
$0 = \frac{h}{\lambda_2} \sin \alpha + m_e v_e \sin \beta$	Pęd – składowa pionowa

Równania otrzymane ze zbilansowania energii i pędu w zjawisku Comptona (Tab. 3.1) prowadzą do wyznaczenia wyrażenia na różnicę długości fali fotonu przed i po jego rozproszeniu:

$$\Delta \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \alpha) \quad (3.33)$$



Rys. 3.10. Zależność zmiany długości fali fotonu komptonowskiego od kąta rozproszenia.

Różnica długości fali fotonu przed i po rozproszeniu zależy tylko od kąta rozproszenia, i to w sposób taki sam, jak w eksperymencie. Kąt rozproszenia fotonu może przybierać wartości od zera (rozproszenie do przodu – bez zmiany długości fali) do 180° (rozproszenie do tyłu). Zależność zmiany długości fali od kąta rozproszenia ilustruje rysunek 3.10.