

1. MECHANIKA

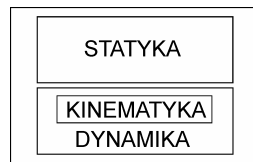
Mechanika - to idee odnoszące się do zrozumienia i opisu wszelkiego ruchu. Wprowadzone tu pojęcia i wielkości dają podstawy innym działom fizyki oraz mechanice technicznej.

Mechanika nie jest jednolitą dziedziną, i tak:

- *Mechanika klasyczna* zawiera idee, które znajdują zastosowanie do opisu zjawisk zachodzących w skali czasu i przestrzeni bliskiej człowiekowi, to znaczy przebiegają w czasie zbliżonym do czasu życia człowieka, w przestrzeni zbliżonej do jego rozmiarów, (czyli co najwyżej kilka rzędów więcej lub mniej).
- *Mechanika kwantowa* zawiera idee przydatne w opisie zjawisk przebiegających w skali bardzo krótkich odcinków czasu, w obrębie bardzo małych rozmiarów.
- *Mechanika relatywistyczna* zawiera idee w obrębie zjawisk w skali dużych szybkości i przyspieszeń. Przy czym matematyczne idee mechaniki relatywistycznej i mechaniki kwantowej nie są sprzeczne z mechaniką klasyczną - są od niej ogólniejsze.

Dydaktyka mechaniki klasycznej sformułowanej przez Newtona wykształciła trzy części: *statykę*, *kinematykę* i *dynamikę*.

- Statyka zajmuje się ciałami pozostającymi w bezruchu, a matematycznie są to równania wynikające z bilansu *sił* i *momentów sił* (rozdział 1.1).
- Kinematyka to opisywanie ruchu oraz wielkościami potrzebnymi do analizy ruchu (rozdział 1.2).
- Dynamika umożliwia opisanie ruchu na bazie znajomości rozkładów sił i momentów sił (rozdział 1.3).



Rys. 1.1. Działy mechaniki.

Rozłączne traktowanie kinematyki i dynamiki ma przyczynę wyłącznie dydaktyczną (stopniowanie trudności), jako że dynamika obejmuje swoim zakresem również kinematykę (rys. 1.1). Matematyka w kinematyce to głównie różniczkowanie (częściowo także całkowanie). Natomiast matematyka w dynamice – to przede wszystkim całkowanie oraz określanie stałych całkowania na podstawie warunków brzegowych (rozdział 1.3).

NEWTON Isaac (1643-1727)



W rozdziale *Mechanika* rozważany jest jeden rodzaj *ciała fizycznego* – *bryła sztywna*. Mechanika innych ciał – jak: materiały plastyczne, przedmioty elastyczne, płyny ściśliwe i nieściśliwe, ciecze lepkie, a także media specjalne (np ciekłe kryształy, ferrosmary) – może być rozważana dopiero po zapoznaniu się z mechaniką bryły sztywnej (niniejszy podręcznik tych zagadnień nie uwzględnia).

1.1. Statyka

Statyka zajmuje się analizą warunków, przy jakich ciała pozostają w bezruchu. Chodzi o bilans sił i momentów sił:

1/ Suma zewnętrznych sił działających w kierunku środka masy ciała wynosi zero (1.1.1).

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad (1.1.1)$$

2/ Suma zewnętrznych momentów sił działających na ciało wynosi zero (1.1.2).

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0 \quad (1.1.2)$$

Reguła 1.1.1 oraz reguła 1.1.2 dostarczają równań, których rozwiązanie zawiera informacje o warunkach pozostawania ciała (czy układu ciał) w stanie statycznym (w bezruchu).

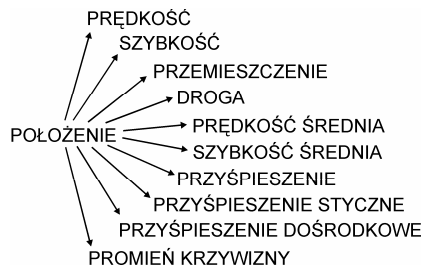
1.2. Kinematyka

Podstawowym zagadnieniem w kinematyce jest identyfikacja *położenia*. W przypadku ruchu postępowego jest to wektor wskazujący położenie punktu (np. *środek masy*) w przestrzeni (rozdział 1.2.1.1), natomiast w ruchu obrotowym jest to kąt obrotu bryły (rozdział 1.2.2).

Z *położenia* można wyznaczyć *szereg wielkości*, np.: *prędkość*, *szybkość*, *przemieszczenie*, *drogę*, *przyspieszenie*, *szybkość średnią*, *prędkość średnią* itd.

1.2.1. Kinematyka w ruchu postępowym

Dział kinematyka w ruchu postępowym uczy umiejętności wyznaczania wielkości kinematycznych z uprzednio zidentyfikowanego położenia (diagram na rys.1.2.1.1).



Rys. 1.2.1.1. Wielkości kinematyczne.

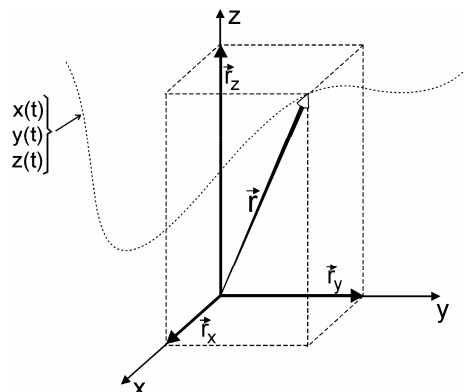
1.2.1.1. Położenie

Położenie $\vec{r}(t)$ to wektorowa funkcja czasu, opisująca ruch punktu w przestrzeni. Początek *położenia* znajduje się w początku układu współrzędnych, koniec *położenia* (strzałka) wskazuje miejsce, gdzie w danym momencie znajduje się punkt (rys. 3). Położenie $\vec{r}(t)$ można rozłożyć na składowe \vec{r}_x , \vec{r}_y i \vec{r}_z . Każda z tych składowych daje się przedstawić jako współrzędna $x(t)$, $y(t)$ lub $z(t)$ pomnożona przez właściwy *wersor* (i – wzdłuż osi x , j – wzdłuż osi y , k – wzdłuż osi z):

$$\vec{r}_x = x(t) i; \quad \vec{r}_y = y(t) j; \quad \vec{r}_z = z(t) k$$

Z tego względu *położenie* $\vec{r}(t)$ zapisuje się w postaci sumy poszczególnych składowych:

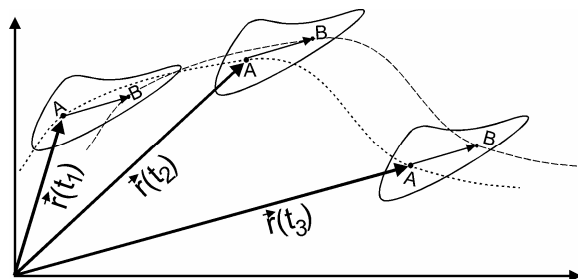
$$\vec{r}(t) = x(t) i + y(t) j + z(t) k \quad (1.2.1.1.1)$$



Rys. 1.2.1.1.1. Położenie.

Współrzędne $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ (trzy funkcje czasu) - z matematycznego punktu widzenia - stanowią układ równań parametrycznych opisujący kształt krzywej – *tor* ruchu punktu.

Położenie, chociaż opisuje ruch obiektu idealnego – czyli tzw. *punktu materialnego*, nadaje się także do opisu *ruchu translacyjnego* bryły sztywnej. Ruch translacyjny występuje wtedy, gdy wszystkie punkty bryły poruszają się po takich samych, równoległych torach (rys. 1.2.1.1.2).

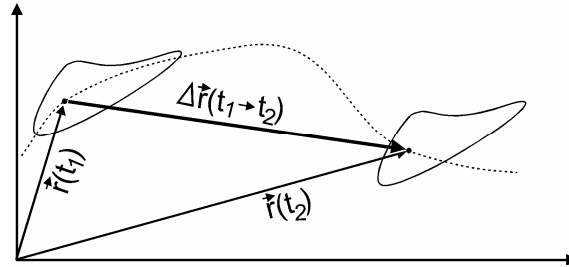


Rys. 1.2.1.1.2. Ruch translacyjny.

1.2.1.2. Przemieszczenie

Przemieszczenie $\Delta \vec{r}(t_1 \rightarrow t_2)$ - wektor, którego początek dotyka miejsca, gdzie punkt znajduje się w momencie t_1 , a koniec – w miejscu - gdzie punkt znajduje się w momencie t_2 . Wektor ów, to różnica *położenia* końcowego i *położenia* początkowego (rys. 1.2.1.2.1).

$$\Delta \vec{r}(t_1 \rightarrow t_2) = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \quad (1.2.1.2.1)$$



Rys. 1.2.1.2.1. Przemieszczenie.

1.2.1.3. Prędkość średnia

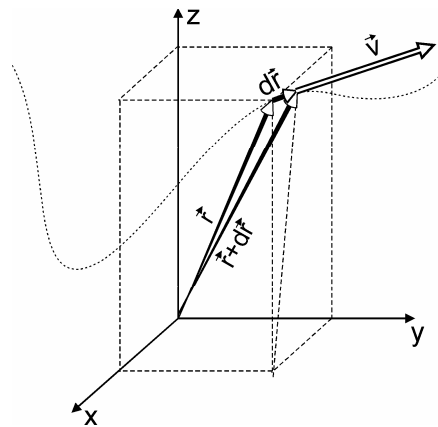
Prędkość średnia $\vec{v}_{sr}(t_1 \rightarrow t_2)$ w czasie od t_1 do t_2 to *przemieszczenie* w czasie od t_1 do t_2 przez czas owego przemieszczania.

$$\vec{v}_{sr}(t_1 \rightarrow t_2) = \frac{\Delta \vec{r}(t_1 \rightarrow t_2)}{t_2 - t_1} \quad (1.2.1.3.1)$$

1.2.1.4. Prędkość

Prędkość (angielskie 'velocity') $\vec{v}(t)$ jest wektorową funkcją czasu określającą szybkość zmiany *położenia*, czyli pochodna położenia względem czasu.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad (1.2.1.4.1)$$



Rys. 1.2.1.4.1. Prędkość.

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d[x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}]}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz(t)}{dt}\mathbf{k} = \\ &= v_x(t)\mathbf{i} + v_y(t)\mathbf{j} + v_z(t)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.2.1.4.2)$$

Z definicji *prędkości* wynika, że jej kierunek i zwrot są takie same jak kierunek i zwrot elementarnego przemieszczenia $d\vec{r}$. Zatem *prędkość* jest wektorem w każdej chwili stycznym do *toru ruchu*.

1.2.1.5. Szybkość

Szybkość $v(t)$ (angielskie 'speed') jest modulem prędkości:

$$v(t) = |\vec{v}| \quad (1.2.1.5.1)$$

Ponadto, w wypadku gdy znana jest funkcja drogi $s(t)$ w zależności od czasu, szybkość może być wyliczona z pochodnej drogi.

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} \quad (1.2.1.5.2)$$

Szybkość w języku angielskim określa słowo **speed**, natomiast prędkość – **velocity**.

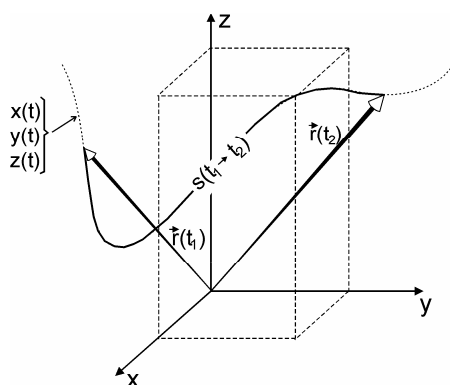
Operacyjna definicja szybkości przyjmuje postać:

$$v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2} \quad (1.2.1.5.3)$$

1.2.1.6. Droga

Droga to długość toru, po jakim punkt porusza się w określonym czasie. W czasie od momentu t_1 do momentu t_2 punkt przebywa drogę równą całce z szybkości względem czasu w granicach od t_1 do t_2 .

$$s(t_1 \rightarrow t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2} dt \quad (1.2.1.6.1)$$



Rys. 1.2.1.6.1. Droga.

W matematyce istnieje pojęcie *hodograf*, które określa geometryczne miejsce końców wektorów funkcji wektorowej, odmierzonych z jednego nieruchomego punktu w przestrzeni (np. z początku współrzędnych). Zatem *droga* to *hodograf* położenia. Zagadnienie drogi warto także porównać z zagadnieniem *długości łuku krzywej* w matematyce.

1.2.1.7. Szybkość średnia

Szybkość średnia v_{sr} w czasie od t_1 do t_2 to droga przez czas, w jakim została przebyta.

$$v_{sr}(t_1 \rightarrow t_2) = \frac{s(t_1 \rightarrow t_2)}{t_2 - t_1} \quad (1.2.1.7.1)$$

1.2.1.8. Przyspieszenie

Przyspieszenie $\vec{a}(t)$ – szybkość zmiany prędkości (po angielsku: 'The acceleration vector is the rate of change of the velocity').

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \quad (1.2.1.8.1)$$

1.2.1.9. Przyspieszenie styczne

Uwaga! Najpierw definicja modułu przyspieszenia stycznego $a_s(t)$, czyli szybkości (szybkość to angielskie 'rate') zmiany szybkości $v(t)$ (w tym przypadku szybkość to angielskie 'speed'; 'The acceleration is the rate of change of the speed'):

$$a_s(t) = \frac{dv(t)}{dt} \quad (1.2.1.9.1)$$

Wersor *przyspieszenia stycznego* jest tożsamy z wersorem *prędkości* (ponieważ wektor *przyspieszenia stycznego* jest równoległy do wektora *prędkości*), zatem *przyspieszenie styczne* można wyrazić następująco:

$$\vec{a}_s(t) = \frac{dv(t)}{dt} \frac{\vec{v}}{v} \quad (1.2.1.9.2)$$

1.2.1.10. Przyspieszenie dośrodkowe

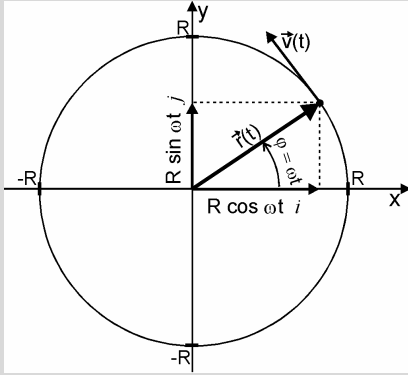
Przyspieszenie dośrodkowe $\vec{a}_d(t)$ jest prostopadłe do toru ruchu. Suma *przyspieszenia stycznego* i *przyspieszenia dośrodkowego* to *przyspieszenie* (wypadkowe). Z tego względu *przyspieszenie dośrodkowe* określa następująca zależność:

$$\vec{a}_d(t) = \vec{a}(t) - \vec{a}_s(t) \quad (1.2.1.10.1)$$

1.2.1.11. Promień krzywizny

Wyrażenie na *promień krzywizny* zostało ustalone w oparciu o doświadczenie nabyte podczas rozważania ruchu po okręgu.

Teoria ruchu po okręgu
 Położenie w ruchu po okręgu wyraża się następująco:

$$\vec{r}(t) = R \cos \omega t \ i + R \sin \omega t \ j \quad (1.2.1.11.1)$$


Rys. 1.8. Ruch po okręgu.
 Prędkość – pochodna położenia - w ruchu po okręgu przyjmuje postać:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -R\omega \sin \omega t \ i + R\omega \cos \omega t \ j \quad (1.2.1.11.2)$$

Natomiast przyspieszenie – pochodna prędkości – wyraża się następująco:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -R\omega^2 \cos \omega t \ i - R\omega^2 \sin \omega t \ j = -\vec{r}(t) \omega^2 \quad (1.2.1.11.3)$$

Zatem przyspieszenie ma kierunek taki sam co położenie, ale przeciwny zwrot, i jest skierowane w kierunku do środka okręgu. Gdyby nie był to ruch jednostajny, przyspieszenie miałoby inny kierunek.

W ruchu po okręgu prędkość jest prostopadła do położenia, co można łatwo sprawdzić obliczając iloczyn skalarny tych wektorów, i przekonując się, że wynosi on zero.

W ruchu jednostajnym po okręgu położenie jest tożsamy z promieniem krzywizny. Posługując się modułami promienia krzywizny, prędkości i przyspieszenia można sformułować następujący związek:

$$a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} \quad (1.2.1.11.4)$$

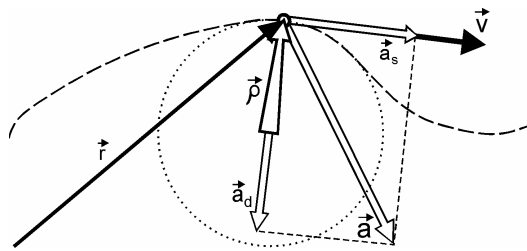
Uogólniając wyrażenie (1.2.1.11.4) na dowolny ruch krzywoliniowy otrzymuje się:

$$a = \rho\omega^2 = \frac{v^2}{r} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a} \quad (1.2.1.11.5)$$

Uwzględniając fakt, że wersor *promienia krzywizny* ma zwrot przeciwny do zwrotu wersora *przyspieszenia*, otrzymujemy:

$$\vec{\rho}(t) = \frac{v^2}{a_d} \left(-\frac{\vec{a}_d}{a_d} \right) \quad (1.2.1.11.6)$$

Przykład konfiguracji przestrzennej *położenia*, *przyspieszeń*, *prędkości* i *promienia krzywizny* w ruchu krzywoliniowym przedstawiony jest na rys. 1.2.1.11.2.



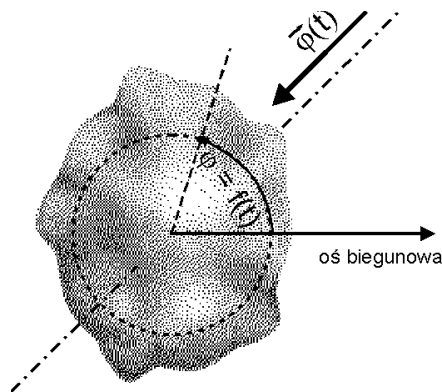
Rys. 1.2.1.11.2. Położenie \vec{r} , przyspieszenia: \vec{a} , \vec{a}_d , \vec{a}_s , prędkość \vec{v} , promień krzywizny $\vec{\rho}$.

1.2.2. Kinematyka w ruchu obrotowym

Ruch obrotowy opisywany jest w układzie współrzędnych biegunowych. W układzie tym wszystkie punkty obracającej się bryły poruszają się z tą samą *prędkością kątową*, tak jak w ruchu postępowym wszystkie punkty poruszają się z tą samą *prędkością* (liniową). W niniejszym rozdziale ograniczono się do ruchu obrotowego wokół nieruchomej osi.

1.2.2.1. Położenie kątowe

Położenie kątowe $\vec{\varphi}(t)$ jest wektorem o wartości równej kątowi, o jaki obróciła się bryła względem osi biegunowej (rys. 1.2.2.1.1). Kierunek tego wektora jest taki sam jak oś obrotu, natomiast zwrot wyznacza się zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej.



Rys. 1.2.2.1.1. Położenie kątowe.

1.2.2.2. Prędkość kątowa

Prędkość kątowa $\vec{\omega}(t)$ jest szybkością zmian *położenia kątowego* (wyrażenie 1.2.2.2.1).

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad (1.2.2.2.1)$$

1.2.2.3. Przyspieszenie kątowe

Przyspieszenie kątowe $\vec{\varepsilon}(t)$ jest szybkością zmian *prędkości kątowej* (wyrażenie 1.2.2.3.1).

$$\vec{\varepsilon}(t) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (1.2.2.3.1)$$

Przykład w zakresie kinematyki ruchu postępowego

Dane jest położenie $\vec{r}(t) = A t^2 \vec{i} + B \cos(C t + D) \vec{j} + E e^{Ft} \vec{k}$

gdzie A, B, D i E – stałe.

Wyznaczyć prędkość, przyspieszenie i prędkość średnią w czasie od t_1 do t_2 .

Rozwiązanie:

Definicja prędkości: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d}{dt} (A t^2 \vec{i} + B \cos(C t + D) \vec{j} + E e^{Ft} \vec{k}) = \\ &= 2A \vec{i} - BC \sin(Ct + D) \vec{j} + EF e^{Ft} \vec{k} \end{aligned}$$

Definicja przyspieszenia: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d}{dt} (2A \vec{i} - BC \sin(Ct + D) \vec{j} + EF e^{Ft} \vec{k}) = \\ &= 2 \vec{i} - BC^2 \cos(Ct + D) \vec{j} + EF^2 e^{Ft} \vec{k} \end{aligned}$$

Definicja prędkości średniej: $\vec{v}_{sr}(t_1 \rightarrow t_2) = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{sr}(t_1 \rightarrow t_2) &= \frac{A t_2^2 \vec{i} + B \cos(C t_2 + D) \vec{j} + E e^{Ft_2} \vec{k} - A t_1^2 \vec{i} + B \cos(C t_1 + D) \vec{j} + E e^{Ft_1} \vec{k}}{t_2 - t_1} = \\ &= \frac{A(t_2^2 - t_1^2)}{t_2 - t_1} \vec{i} + \frac{B(\cos(Ct_2 + D) - \cos(Ct_1 + D))}{t_2 - t_1} \vec{j} + \frac{E(e^{Ft_2} - e^{Ft_1})}{t_2 - t_1} \vec{k} \end{aligned}$$

1.3. Dynamika

1.3.1. Dynamika w ruchu postępowym

W dynamice stosuje się zasadę Newtona wyrażającą pogląd, że ciało o masie m porusza się z przyspieszeniem \vec{a} proporcjonalnym do przyłożonej siły \vec{F} , a współczynnikiem proporcjonalności jest odwrotność masy. Jest to treść tzw. II zasady dynamiki Newtona. W zasadzie tej mieści się także I zasada dynamiki Newtona, ponieważ – jak łatwo zauważyć – gdy $\vec{F}=0$ wówczas $\vec{a}=0$, czyli ciało porusza się cały czas z prędkością początkową. Matematycznie wspomniana II zasada jest zapisywana następująco:

$$\vec{a}(t) = \frac{1}{m} \vec{F}(t) \quad (1.3.1)$$

Biorąc pod uwagę powyższą zasadę newtonowskiej dynamiki oraz definicję przyspieszenia otrzymujemy następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{1}{m} \vec{F}(t) \Rightarrow d\vec{v}(t) = \frac{1}{m} \vec{F}(t) dt \quad (1.3.2)$$

Przedtem obowiązywała tzw. mechanika arystotelesowska, w jakiej zakładano, że ciało porusza się tylko wówczas, gdy przyłożona jest do niego siła. System Arystotelesa nie był zmatematyzowany – stosowano w nim klasyczną spekulację logiczną.

Arystoteles (384-322 p.n.e)

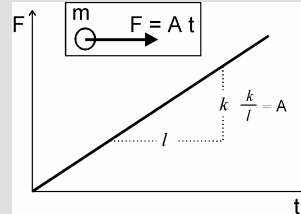


W rezultacie obustronnego scałkowania równania (1.3.2) otrzymujemy wyrażenie na prędkość (przykład poniżej).

Przykład 1 w obrębie dynamiki w ruchu postępowym

Na masę m działa siła $F = A t$, gdzie A jest stałą. Wyznaczyć zależność prędkości od czasu jeżeli prędkość początkowa wynosi v_0 .

Rozwiązanie:



$$dv(t) = \frac{1}{m} A t dt$$

po obustronnym scałkowaniu

$$v(t) + C_1 = \frac{1}{m} \frac{1}{2} A t^2 + C_2$$

podstawiając $C = C_2 - C_1$ otrzymujemy:

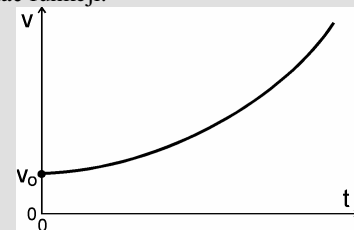
$$v(t) = \frac{1}{m} \frac{1}{2} A t^2 + C$$

W chwili początkowej $v = v_0$, zatem

$$v(t=0) = \frac{1}{m} \frac{1}{2} A 0^2 + C \Rightarrow C = v_0$$

i wyrażenie na szybkość przyjmuje postać funkcji:

$$\underline{v(t) = \frac{1}{m} \frac{1}{2} A t^2 + v_0}$$



Powyższe rozwiązanie jest okazją do przypomnienia ogólnej zasady odnośnie geometrycznej interpretacji funkcji i równania. Mianowicie: linia na wykresie odnosi się do funkcji, natomiast punkt na tej linii – do równania. **W fizyce wszystkie wyrażenia są funkcjami lub równaniami.**

Wzory wprowadza się dopiero w inżynierii poszczególnych dziedzin technicznych i przyrodniczych.

Po wyznaczeniu $\vec{v}(t)$ można ustalić położenie $\vec{r}(t)$ pod warunkiem, że znane jest położenie początkowe $\vec{r}(t=0) \equiv \vec{r}_0$. Jesteśmy w stanie to uczynić korzystając z definicji prędkości, z której wynika:

$$d\vec{r}(t) = \vec{v}(t) dt \quad (1.3.3)$$

Przykład 2 w zakresie dynamiki w ruchu postępowym

Na masę m działa siła $F = A t$, gdzie A jest stałą. Wyznaczyć zależność położenia od czasu jeżeli prędkość początkowa wynosi v_0 a współrzędna początkowa x_0 .

Rozwiązanie:

Najpierw wyznaczamy prędkość tak jak w zadaniu 1.1.

$$v(t) = \frac{1}{m} \frac{1}{2} A t^2 + v_0$$

Następnie adaptujemy definicję prędkości do warunków zadania, tzn. położenie zastępujemy współrzędną, ponieważ mamy do czynienia z ruchem jednowymiarowym – wystarczy posługiwać się współrzędną usytuowaną wzdłuż kierunku ruchu.

$$dx = v(t) dt$$

$$dx = \left(\frac{1}{m} \frac{1}{2} A t^2 + v_0 \right) dt$$

Po obustronnym scałkowaniu:

$$x = \frac{1}{m} \frac{1}{6} A t^3 + v_0 t + C$$

$$x_0 = \frac{1}{m} \frac{1}{6} A 0^3 + v_0 0 + C$$

$$C = x_0$$

$$x(t) = \frac{1}{m} \frac{1}{6} A t^3 + v_0 t + x_0$$

Przykład 3 w zakresie dynamiki w ruchu postępowym

Do masy 10 g przyłożono siłę $\vec{F} = 30 e^{2t} i + 20 \sin(3t) j + 50 t^2 k$

Wyznaczyć położenie, jeżeli $\vec{v}_0 = 2 i + 3 j - 2 k$ $\vec{r}_0 = 2 i + 3 j - 2 k$

Rozwiązanie.:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{a} = 3 e^{2t} i + 2 \sin(3t) j + 5 t^2 k$$

$$\vec{v} = \int (3 e^{2t} i + 2 \sin(3t) j + 5 t^2 k) dt$$

$$\vec{v} = \left(\frac{3}{2} e^{2t} + A \right) i + \left[-\frac{2}{3} \cos(3t) + B \right] j + \left[\frac{5}{3} t^3 + C \right] k$$

$$2 = \frac{3}{2} + A \quad 3 = -\frac{2}{3} + B \quad -2 = C$$

$$A = \frac{1}{2} \quad B = 2\frac{1}{3} \quad C = -2$$

$$\vec{v} = \left(\frac{3}{2} e^{2t} + \frac{1}{2} \right) i + \left[-\frac{2}{3} \cos(3t) + 2\frac{1}{3} \right] j + \left[\frac{5}{3} t^3 - 2 \right] k$$

$$\vec{r} = \int \left\{ \left(\frac{3}{2} e^{2t} + \frac{1}{2} \right) i + \left[-\frac{2}{3} \cos(3t) + 2\frac{1}{3} \right] j + \left[\frac{5}{3} t^3 - 2 \right] k \right\} dt$$

$$\vec{r} = \left(\frac{3}{4} e^{2t} + \frac{1}{2} t + D \right) i + \left[-\frac{2}{9} \sin(3t) + 2\frac{1}{3} t + E \right] j + \left[\frac{5}{12} t^4 - 2t + F \right] k$$

$$2 = \frac{3}{4} + D \quad 3 = E \quad -2 = F$$

$$\vec{r} = \left(\frac{3}{4} e^{2t} + \frac{1}{2} t + 1\frac{1}{4} \right) i + \left[-\frac{2}{9} \sin(3t) + 2\frac{1}{3} t + 3 \right] j + \left[\frac{5}{12} t^4 - 2t - 2 \right] k$$

1.3.2.1. Zasada zachowania pędu

Zasada zachowania pędu jest inną formą newtonowskiej zasady dynamiki. Do stwierdzenia tego prowadzi następujące rozumowanie polegające na przekształcaniu zasady dynamiki:

$$\vec{a}(t) = \frac{1}{m} \vec{F}(t) \quad (1.3.2.1.1)$$

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{1}{m} \vec{F}(t) \quad (1.3.2.1.2)$$

$$m d\vec{v}(t) = \vec{F}(t) dt \quad (1.3.2.1.3)$$

Iloczyn masy i elementarnej zmiany prędkości określono jako elementarną zmianę pędu.

$$d\vec{p}(t) = \vec{F}(t) dt \quad (1.3.2.1.4)$$

Powyższy zapis odczytuje się tak: elementarna zmiana pędu jest równa iloczynowi siły i elementarnemu czasowi działania tej siły. Zapis 1.3.2.1.4 można sprowadzić do formy 1.3.2.1.5:

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}(t) \quad (1.3.2.1.5)$$

Powyższe równanie odczytuje się w sposób następujący: *szybkość zmiany pędu ciała lub układu ciał jest równa wypadkowej sile zewnętrznej*. Jeżeli wypadkowa siła zewnętrzna jest równa zero, czyli prawa strona w równaniu (1.3.2.1.5) równa jest zero, wtedy pęd nie zmienia się (ponieważ różniczkowana wielkość musi być wielkością stałą, skoro pochodna wynosi zero) – co stanowi treść zasady zachowania pędu.

1.3.2. Dynamika w ruchu obrotowym

Newtonowska zasada dynamiki w odniesieniu do ruchu obrotowego przyjmuje następującą postać:

$$\vec{\epsilon}(t) = \frac{1}{I} \vec{M}(t) \quad (1.3.2.1)$$

gdzie: $\vec{\epsilon}(t)$ = przyśpieszenie kątowe, I = moment bezwładności, $\vec{M}(t)$ = moment siły

Przyśpieszenie kątowe, moment bezwładności i moment siły dotyczą tej samej osi obrotu.

1.3.2.1. Zasada zachowania momentu pędu

Zasada zachowania momentu pędu to konsekwencja przekształcenia zasady dynamiki (1.3.2.1) w ruchu obrotowym:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{1}{I} \vec{M}(t) \quad (1.3.2.2)$$

$$I d\vec{\omega} = \vec{M}(t) dt \quad (1.3.2.3)$$

Iloczyn momentu bezwładności i elementarnej zmiany prędkości kątowej stanowi elementarną zmianę momentu pędu.

$$d\vec{L} = \vec{M}(t) dt \quad (1.3.2.4)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}(t) \quad (1.3.2.5)$$

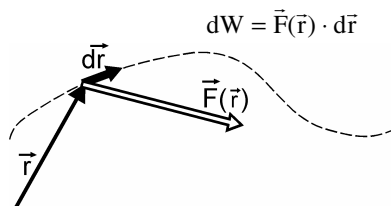
Z równania (1.3.2.5) wyprowadza się wniosek analogiczny jak w przypadku zasady zachowania pędu, mianowicie: z faktu $\vec{M}(t) = 0$ wynika, że $\vec{L} = \text{const}$ – co stanowi treść zasady zachowania momentu pędu. Warto zauważyć, że każde wirujące ciało (wirujące – czyli obdarzone momentem pędu) musi zmieniać swój moment pędu w kierunku przyłożonego zewnętrznego momentu siły. Np. zabawka-bąk po wpływie momentu siły ciężkości nie przewraca się, lecz koniec wektora momentu pędu w każdej chwili przemieszcza się w kierunku momentu siły ciężkości. W efekcie, koniec ów zakreśla okrąg, a cały wektor momentu pędu – powierzchnię boczną odwróconego do góry stożka. Efekt zmiany kierunku wektora momentu pędu pod wpływem zewnętrznego momentu siły zwane jest *precesją*.

1.4. Praca

Pojęcie pracy występuje we wszystkich działach fizyki i przyjmuje różne formy. W każdym przypadku jest to adaptacja ogólnej definicji pracy (rozdział 1.4.1).

1.4.1. Ogólna definicja pracy

Praca wykonana przez siłę podczas elementarnego przemieszczenia – to iloczyn skalarny siły $\vec{F}(\vec{r})$ oraz elementarnego przemieszczenia $d\vec{r}$.

$$dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (1.4.1.1)$$


Rys. 1.4.1.1. Graficzny komentarz do definicji pracy.

Adaptacja ogólnej definicji pracy do szczególnych przypadków czyni ją zwykle prostszą. Na przykład, jeżeli siła działa stale w tym samym kierunku i przemieszczenie odbywa się również w tym kierunku, wówczas:

$$dW = F(x) dx \quad (1.4.1.2)$$

gdzie x oznacza współrzędną usytuowaną w kierunku działania siły.

1.4.2. Praca w ruchu obrotowym

Praca wykonana przez moment siły podczas elementarnego przemieszczenia kąowego – to iloczyn skalarny momentu siły i elementarnego przemieszczenia kąowego.

$$dW = M(\varphi) \cdot d\varphi \quad (1.4.2.1)$$

Należy pamiętać, że jednostką φ jest *radian*, który - z kolei - zgodnie z definicją miary kąta jest wyrażony jako m/m (metr na metr).

1.4.3. Praca prądu elektrycznego

Definicja pracy w odniesieniu do pracy wykonywanej przez przemieszczającą ładunki siłę pola elektrycznego przyjmuje postać:

$$dW = u(t) i(t) dt \quad (1.4.3.1)$$

gdzie: $u(t)$ = napięcie elektryczne; $i(t)$ = natężenie prądu elektrycznego.

Rozwinięcie zagadnienia znajduje się w rozdz. 6.

1.4.4. Praca gazu

Gaz rozprężając się wykonuje pracę. Elementarna praca wykonana przez gaz podczas elementarnej zmiany jego objętości wyraża się następująco:

$$dW = p(V) dV \quad (1.4.4.1)$$

gdzie: $p(V)$ to zależność ciśnienia od objętości; dV - elementarna zmiana objętości.