Wprowadzenie teoretyczne

Doświadczenie „S T E I N E R"

Moment bezwładności jest skalarną wielkością fizyczną, zależną od rozkładu masy względem osi obrotu. Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego bryły sztywnej, przyspieszenie kątowe ε jest wprost proporcjonalne do wypadkowego momentu siły *M*, a odwrotnie proporcjonalne do momentu bezwładności *I*.

$$\varepsilon=\frac{M}{I}$$

Moment bezwładności *I* stanowi więc miarę bezwładności bryły w ruchu obrotowym i pełni rolę analogiczną do masy w dynamice ruchu postępowego.

Moment bezwładności dla pojedynczego punktu materialnego o masie *m*, rotującego w odległości *r* od osi obrotu:

$$I=m\cdot r^2$$

Moment bezwładności dla ciała sztywnego składającego się z *n* połączonych punktów materialnych jest sumą:

$$I=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Moment bezwładności dla bryły sztywnej o ciągłym rozkładzie masy i jednorodnej gęstości ρ. Tu sumowanie zastępuje się całkowaniem po całej objętości bryły:

$$I=\int r^2 dm=\rho\int r^2 dV$$

Operacyjna (różniczkowa) definicja momentu bezwładności, jest następująca: wkład do momentu bezwładności pochodzący od elementarnej (infinitezymalnie małej) masy *dm* odległej o *r* od osi obrotu to iloczyn kwadratu tej odległości i elementarnej masy:

$$dI=r^2 dm$$

Twierdzenie Steinera o osiach równoległych. Jeżeli znamy moment bezwładności bryły I_0 względem osi obrotu, przechodzącej przez środek masy tej bryły, to moment bezwładności I względem nowej osi, równoległej do pierwotnej można zapisać równaniem:

$$I=I_0+mb^2$$

gdzie: *m* to masa bryły, *b* to odległość pomiędzy osiami obrotu.

Wahadło fizyczne jest to dowolna bryła sztywna zawieszona na poziomej osi obrotu, która wykonuje drgania w polu grawitacyjnym. Na wahadło wychylone z położenia równowagi o kąt θ, działa moment siły *M*:

$$M=-m g\cdot d\cdot\sin\theta\,,$$

gdzie: *m* – masa wahadła, *g* – przyspieszenie ziemskie, *d* – odległość od osi obrotu do środka masy.
W przybliżeniu małych drgań ($\sin\theta\approx\theta$), okres drgań wahadła dany jest wzorem:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}.$$

Wahadło torsyjne wykonuje drgania harmoniczne w ruchu skrętnym, zwykle wokół pionowej osi obrotu. Ruch harmoniczny skrętny (ruch torsyjny) wystąpi wówczas, gdy na bryłę działa moment siły *M*, proporcjonalny do wychylenia kątowego φ z położenia równowagi:

$$M=-D\varphi\,,$$

D - moduł sprężystości skrętnej (związany ze współczynnikiem sprężystości materiału, z jakiego wykonana jest sprężyna i z jej rozmiarami geometrycznymi). Okres drgań wahadła torsyjnego, w analogii do wahadła fizycznego, wynosi:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}.$$

Pytania do przygotowania:

„S T E I N E R”

1. Podaj definicję i jednostkę momentu bezwładności.
2. Podaj definicję i jednostkę momentu siły.
3. Omów zasady dynamiki dla ruchu obrotowego bryły sztywnej.
4. Podaj wzory na momenty bezwładności podstawowych brył sztywnych: walca (krążka), pręta i kuli.
5. Podaj twierdzenie Steinera.
6. Co to jest wahadło fizyczne?
7. Co to jest wahadło torsyjne?
8. Omów zasadę działania klucza dynamometrycznego.
9. Co to jest okres drgań wahadła?
10. Co to jest częstotliwość drgań wahadła?
11. Omów zasadę zachowania energii w ruchu obrotowym.
12. Podaj wzór na energię kinetyczną ruchu obrotowego bryły sztywnej.
13. Jak zmienia się amplituda oraz okres drgań w ruchu drgającym tłumionym?
14. Oblicz moment bezwładności walca o promieniu 1 m i masie 100 kg przy obrocie wokół swojej krawędzi.
15. Oblicz moment bezwładności pręta o długości 1 m i masie 100 g przy obrocie wokół jego końca.

Wskazówki do wykonania pomiarów

1. W pierwszej kolejności należy przyjrzeć się zestawowi pomiarowemu, aby w późniejszych krokach umieć prawidłowo go zamontować.
2. Przed przystąpieniem do właściwych pomiarów, należy zdjąć krążek z naniesioną skalą kątową z zamocowania, aby wykonać pomiary statyczne krążka (masa i promień).
3. Pomiar masy krążka należy wykonać za pomocą wagi, po uprzednim jej wyzerowaniu (przycisk TARA).
4. Wykonać pomiar promienia (lub średnicy) krążka za pomocą dostępnej na stanowisku linijki.
5. Umieścić krążek środkowym otworem na statywie wyposażonym w sprężynę taśmową. Krążek powinien być umieszczony w taki sposób aby końcówka znacznika znajdowała się przy bramce do pomiaru czasu. Pamiętać o solidnym dokręceniu krążka.
6. Zamocowany krążek odchylić o 90 stopni, wcisnąć przycisk „SET” na bramce pomiaru czasu i zwolnić krążek w celu wykonania pomiaru jednego okresu. Wynik zapisać w 1 kolumnie tabeli wyników, wpisując zmierzony czas pomiaru i wartość $b = 0$.
7. Ponownie zdemontować krążek w celu wykonania pomiaru odległości kolejnego otworu od osi krążka b i zamocować krążek w tym otworze analogicznie jak w pkt. 5.
8. Wykonać pomiary okresów T dla pozostałych odległości b między jego środkiem a osią obrotu.
9. Oszacować niepewności pomiarowe:
   ΔT – dla najwiekszej wartości b powtórzyć pomiar kilkakrotnie obserwując rozrzut wyników,
   Δb – uwzglednić dokładność przyrządu i dokładnosć wykonania otworów.
10. Po zakończonych pomiarach uporządkować stanowisko.
11. Wykonać obliczenia zgodnie z wzorami w sprawozdaniu. W obliczeniach pamiętać o używaniu jednostek podstawowych układu SI.

Szablon metodyczny

„S T E I N E R”

Student 1: Wyznaczanie momentu bezwładności bryły metodą dynamiczną.
Student 2: Sprawdzanie twierdzenia Steinera.

Baza teoretyczna

Okres drgań wahadła skrętnego: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$,

gdzie moment bezwładności I zgodnie z tw. Steinera:

$$I = I_0 + mb^2$$

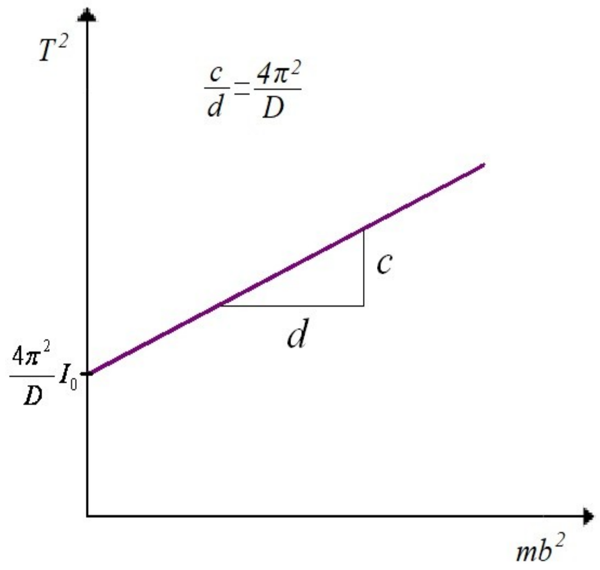
Po podstawieniu i podniesieniu do drugiej potęgi

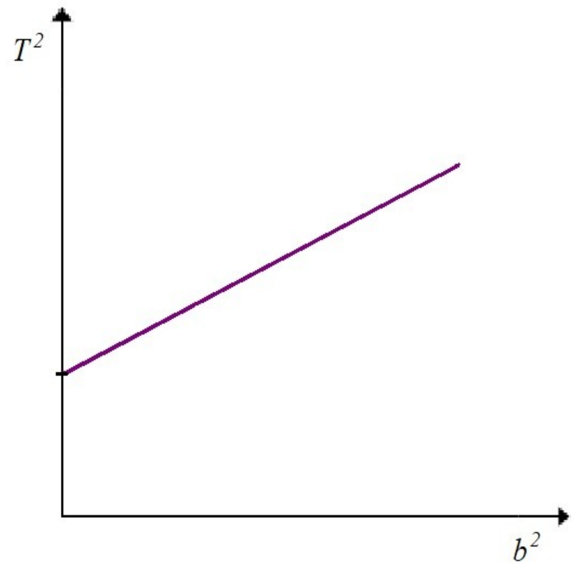
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D}\left(I_0 + mb^2\right)$$

Można przedstawić jako funkcję liniową $Y = A\,X + B$:

$$\underbrace{T^2}_{Y} = \underbrace{\frac{4\pi^2}{D}}_{A}\,\underbrace{mb^2}_{X} + \underbrace{\frac{4\pi^2}{D}I_0}_{B}$$

Szukany moment bezwładności to $I_0 = \frac{B}{A}$.





Zatem, aby **wyznaczyć moment bezwładności krążka** przy pomocy wahadła skrętnego należy:
- wykonać pomiar okresu drgań torsyjnych krążka od odległości b między jego środkiem a osią obrotu
- sporządzić wykres zależności T^2 od mb^2,
- z parametrów prostej wyznaczyć moment bezwładności krążka I_0, jako współczynnik wysokości B podzielony przez współczynnik kierunkowy A.

Zatem, aby **sprawdzić twierdzenie Steinera**, należy:
- wykonać pomiar okresu drgań torsyjnych krążka od odległości b między jego środkiem a osią obrotu
- sporządzić wykres zależności T^2 od b^2,
- zanalizować jego liniowość.

Wskazówki do sprawozdania – wyznaczanie

„S T E I N E R"

Student 1: Wyznaczanie momentu bezwładności bryły metodą dynamiczną.

I. **Metodyka** (ideowy plan ćwiczenia)

II. **Przebieg ćwiczenia**
II.1. Przebieg czynności
II.2. Szkic układu pomiarowego

III. **Wyniki**
III.1. Wyniki pomiarów

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	[s]										
b	[m]										

ΔT = ... R = ... m = ...
Δb = ... ΔR = ... Δm = ...

III.2. Obliczenia (przykładowe – odnoszą się do pomiaru nr 3)

T^2 = ...
mb^2 = ...
$\Delta T^2 = | T^2 - (T + \Delta T)^2 |$ = ...
$\Delta mb^2 = b^2 \Delta m + 2mb \Delta b$ = ...

III.3. Wyniki obliczeń do wykresu

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T^2	[...]										
mb^2	[...]										
ΔT^2	[...]										
Δmb^2	[...]										

III.4. Wykres
(na którym znajdują się wyliczenia współczynników kierunkowego A i wysokości B prostej postaci Y = A·X + B)
\+ obliczenie I_0 (jako iloraz B/A dla prostej „najlepszego dopasowania")
\+ obliczenie I_0' (jako iloraz B'/A' dla prostej odchylonej)
\+ obliczenie $\Delta I_0 = |I_0 - I_0'|$

IV. PODSUMOWANIE

Wyznaczona metodą dynamiczną wartość momentu bezwładności I_0 wynosi ...
Dokładność metody: ...
Dla porównania wartość momentu bezwładności krążka obliczona metodą statyczną $I_0 = 0{,}5\, m R^2$ wynosi
Różnice między momentami bezwładności obliczonymi tymi metodami wynikają z ...

Dodatkowe wnioski, spostrzeżenia, przyczyny niepewności pomiarowych, Wskazówki do sprawozdania – sprawdzanie

„S T E I N E R"

Student 2: Sprawdzanie twierdzenia Steinera.

I. **Metodyka** (ideowy plan ćwiczenia)

II. **Przebieg ćwiczenia**
II.1. Przebieg czynności
II.2. Szkic układu pomiarowego

III. **Wyniki**
III.1.Wyniki pomiarów

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	[s]										
b	[m]										

ΔT = ...
Δb = ...

III.2. Obliczenia (przykładowe – odnoszą się do pomiaru nr 3)

T^2 = ...
b^2 = ...
$\Delta T^2 = |\ T^2 - (T + \Delta T)^2\ |$ = ...
$\Delta b^2 = |\ b^2 - (b + \Delta b)^2\ |$ = ...

III.3. Wyniki obliczeń

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T^2	[...]										
b^2	[...]										
ΔT^2	[...]										
Δb^2	[...]										

III.4. Wykres

IV. PODSUMOWANIE

Ponieważ na wykresie ... można poprowadzić prostą przechodzącą przez wszystkie prostokąty niepewności pomiarowych, nie ma podstaw do stwierdzenia odstępstwa od ...

Ewentualnie: Odstępstwo od liniowości w zakresie ... może wynikać z ....

Dodatkowe wnioski, spostrzeżenia, przyczyny niepewności pomiarowych.