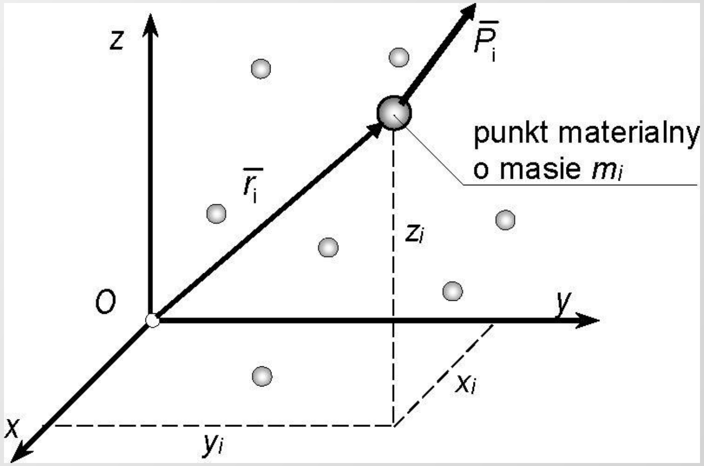
MECHANIKA ANALITYCZNA
Równania Lagrange'a

LECH MURAWSKI
l.murawski@wm.umg.edu.pl
pok. A213

Współrzędne uogólnione



Współrzędne kartezjańskie:

$$\overline{r}_i[x_i, y_i, z_i], \quad i = 1,2,\ldots,p$$

Współrzędne uogólnione:

$$q_i \, , \quad \text{gdzie} \quad i = 1,2,\ldots,s \, ,$$

Współrzędne prostokątne (kartezjańskie) dowolnego punktu można wyrazić w zależności od współrzędnych uogólnionych:

$$x_i = x_i(q_1, \ldots, q_s)\,, \quad y_i = y_i(q_1, \ldots, q_s)\,, \quad z_i = z_i(q_1, \ldots, q_s)$$

Współrzędne uogólnione

Ogólne równanie dynamiki korzystnie jest przedstawić w tzw. współrzędnych uogólnionych, które przedstawiają sobą minimalną liczbę niezależnych parametrów, określających jednoznacznie położenie układu w przestrzeni.
Zakłada się najogólniej, że na układ materialny nałożono k geometrycznych (holonomicznych) i l kinematycznych (nieholonomicznych) więzów. Dla takiego układu złożonego, nieholonomicznego liczbę jego stopni swobody s_n wyznacza się ze wzoru:

$$s_n = 3n - k - l \qquad \text{(a)}$$

gdzie: $3n$ - liczba stopni swobody n punktów materialnych.
Dla układu holonomicznego liczbę stopni swobody s oblicza się ze wzoru:

$$s = 3n - k \qquad \text{(b)}$$

Niech q_1, q_2, ..., q_m oznaczają współrzędne uogólnione układu. Ich liczba dla układu holonomicznego wynosi:

$$m = 3n - k = s \qquad \text{(c)}$$

Współrzędne uogólnione q_i mogą być obrane dowolnie, ale tak żeby przy ich pomocy można było zastąpić współrzędne kartezjańskie x_i, y_i, z_i w opisie promienia-wektora r_i punktów materialnych układu. tj.

$$r_i = r_i (q_1, q_2, ..., q_m, t), \quad i=1, 2, \ldots, n$$

Siły uogólnione

Praca przygotowana:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \delta L_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i \right)$$

Przemieszczenie przygotowane:

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j , \qquad \delta y_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j , \qquad \delta z_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \left[F_{ix} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j + F_{iy} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j + F_{iz} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j \right]$$

Zmiana kolejności sumowania

$$\delta L = \sum_{j=1}^{s} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j$$

Siły uogólnione

$$\delta L = \sum_{j=1}^{s}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)\right]\delta q_j$$

Siła uogólniona:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n}\left(F_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)$$

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$$

Praca przygotowana:

$$\delta L = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j$$

Siły uogólnione

Siła uogólniona:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$$

Praca przygotowana:

$$\delta L = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j$$

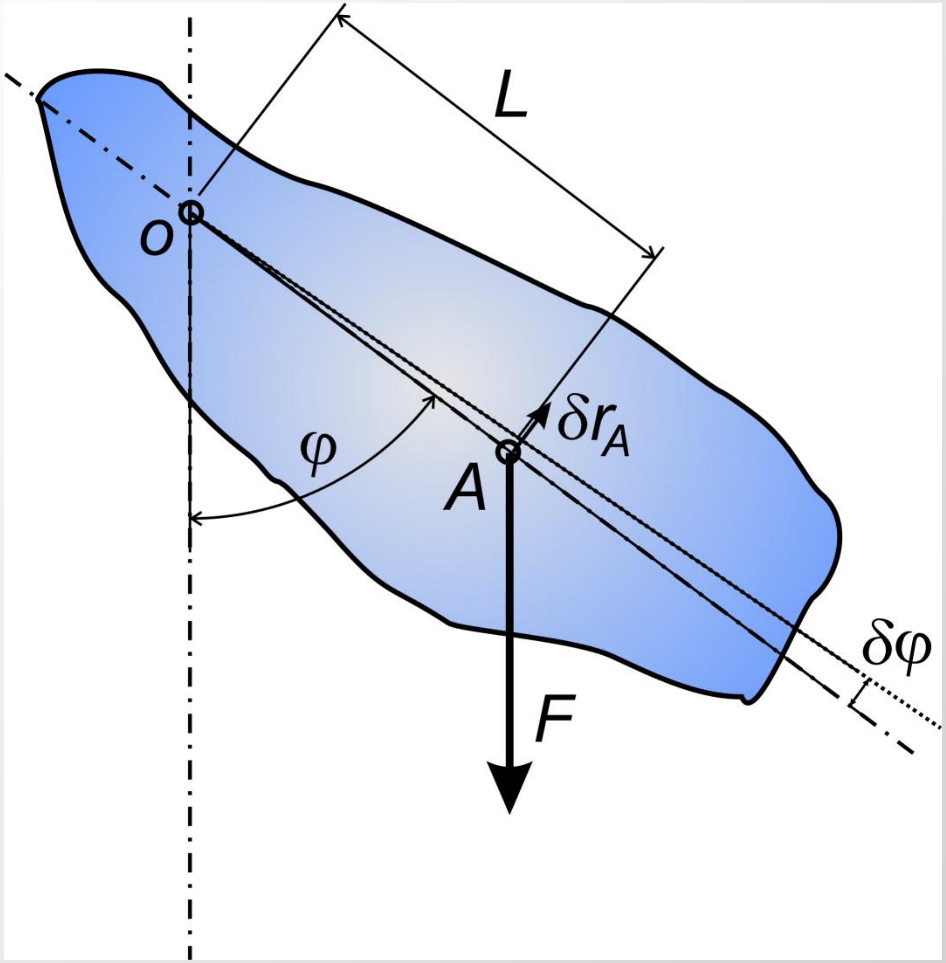
W ogólnym przypadku siła uogólniona jest funkcją q_j, $\dot{q}_j$ i t przy czym $j=1, ..., m$.
Należy zaznaczyć, że obliczając siłę Q_j z reguły nie korzysta się z powyższego wzoru. Zazwyczaj dla układu nadaje się takie przemieszczenie wirtualne, przy którym $\delta q_k=0$ dla wszystkich k oprócz $k=j$. W tym przypadku $\delta L=Q_j\delta q_j$, **stąd**

$$Q_j = \frac{\delta L}{\delta q_j}$$

W ogólnym równaniu dynamiki pracę wirtualną sił czynnych, przy uwzględnieniu powyższej zależności, zapisuje się w postaci:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{m} Q_j \delta q_j$$

Siły uogólnione - przykład



φ – współrzędna uogólniona

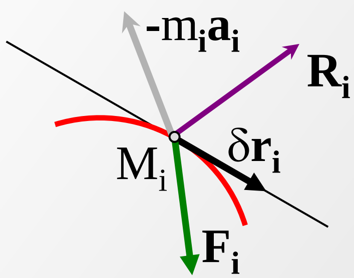
$$\delta L = F\delta \boldsymbol{r}_A = -F \cdot L sin\varphi \cdot \delta\varphi$$

$$\delta L = Q_\varphi \cdot \delta\varphi$$

Siła uogólniona:

$$Q_\varphi = -FLsin\varphi$$

Mechanika analityczna w dynamice



$$\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i\right)\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0$$

Powyższe równanie jest spełnione dla więzów idealnych, w których:

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

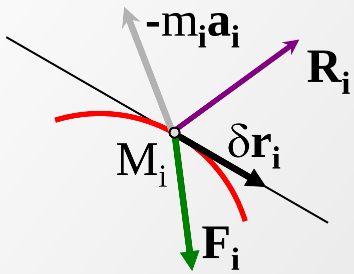
Przy czym:

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) \qquad q_j = q_j(t)$$

Pamiętamy, że zazwyczaj dla układu nadaje się takie przemieszczenie wirtualne, przy którym $\delta q_k=0$ dla wszystkich k oprócz k=j. Inaczej mówiąc, ponieważ δq_j są dowolne, można założyć, że tylko jedna wariacja δq_j jest różna od zera. Wówczas:

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

Równania Lagrange'a



$$\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i\right)\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0$$

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j = 0$$

Ponieważ δq_j jest dowolne, to:

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$$

Powyższych równań można ułożyć tyle, ile jest współrzędnych uogólnionych!

Równania Lagrange'a

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}}{\partial q_j}$$

Prawa strona równania to są siły uogólnione:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$$

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right)$$

Stąd:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}}}{\partial q_j} = Q_j$$

Dwie tożsamości

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = Q_j$$

Do przekształcenia lewej strony równania niezbędne jest wyprowadzenie dwóch tożsamości. Pierwsza tożsamość:

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t) \qquad q_j = q_j(t)$$

Po zróżniczkowaniu wektora wodzącego (wyrażonego we współrzędnych uogólnionych) względem czasu otrzymamy **prędkości uogólnione**:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{v}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

Różniczkując powyższe równanie względem konkretnego $\dot{q}_j$ otrzymamy pierwszą tożsamość:

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$$

Dwie tożsamości

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = Q_j$$

Drugą tożsamość otrzymamy różniczkując powyższą wielkość względem czasu, która występuje w równaniu (jest to pochodna materialna z wielkości w ruchu złożonym, stąd pochodna ta składa się z pochodnej lokalnej i pochodnej konwekcyjnej):

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Pamiętamy że:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{v}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1 \partial q_j} \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s \partial q_j} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t \partial q_j}$$

Z drugiej strony różniczkując względem $\mathbf{q_j}$ wyrażenie $\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{i}$, mamy:

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \partial q_1} \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \partial t}$$

Dwie tożsamości

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1 \partial q_j}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s \partial q_j}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t \partial q_j}$$

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \partial q_1}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \partial t}$$

Druga tożsamość:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) \equiv \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}$$

Pierwsza tożsamość:

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$$

Równanie równowagi:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = Q_j$$

Równania Lagrange'a

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = Q_j$$

Pierwsza tożsamość

Druga tożsamość

Przekształcając lewą stronę równania mamy:

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right)$$

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}$$

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2}{2} \right)$$

Równania Lagrange'a

Dla całego układu (n punktów) mamy:

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{m_i \boldsymbol{v}_i^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{m_i \boldsymbol{v}_i^2}{2}\right)\right\}$$

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{m_i \boldsymbol{v}_i^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i \boldsymbol{v}_i^2}{2}\right)$$

Wykorzystując energię kinetyczną układu punktów materialnych to jest

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$$

Powyższe równanie można napisać w postaci:

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

Równania Lagrange'a w potencjalnym polu siły

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

Energia kinetyczna jest zatem funkcją:

$$T = T(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$$

W przypadku ruchu układu w potencjalnym polu sił mamy:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$V = T(q_1, \dots, q_s)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

Wprowadzając funkcję Lagrange'a:

$$L = T - V$$

Równania Lagrange'a II rodzaju przyjmują postać:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_j} = 0$$

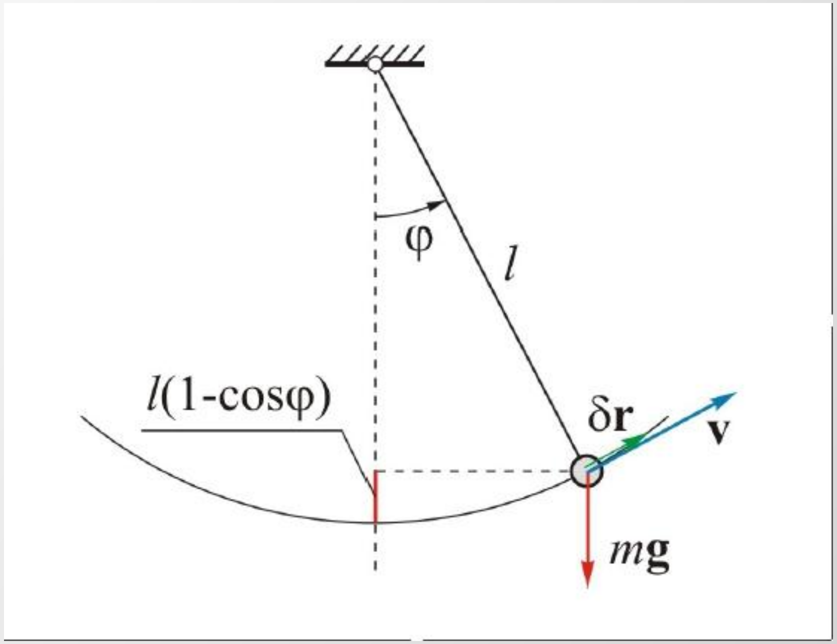
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Równania Lagrange'a – przykład 1

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Znaleźć równania ruchu wahadła matematycznego



$$s = 1 \qquad q_1 = \varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

Energia kinetyczna:

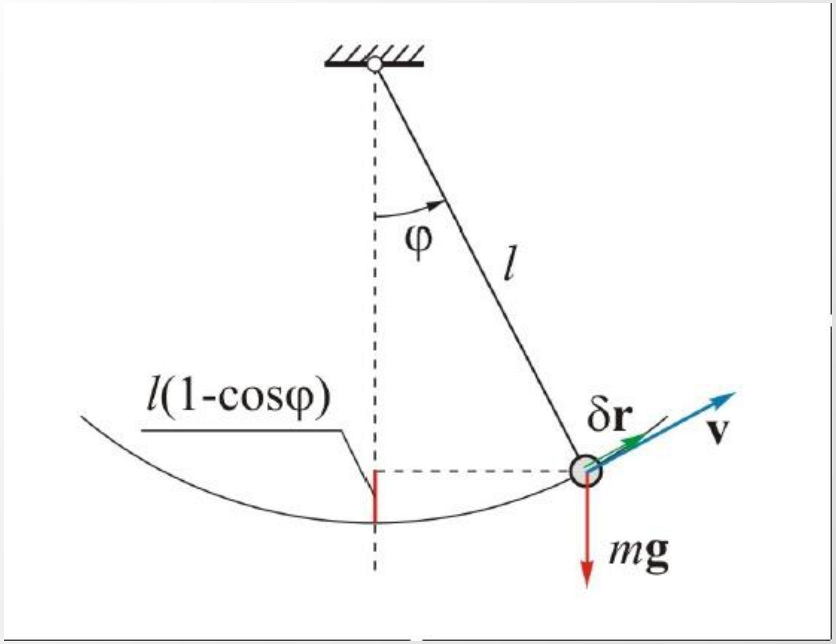
$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2\ddot{\varphi}$$

Równania Lagrange'a – przykład 1



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2\ddot{\varphi}$$

Energia potencjalna:

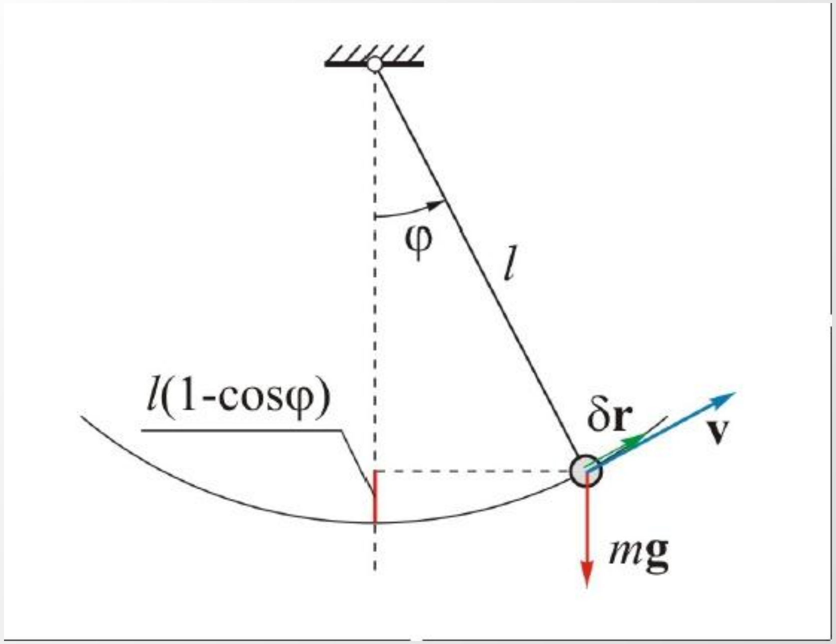
$$V = mgl(1 - cos\varphi)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = mgl \cdot sin\varphi$$

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \cdot sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} sin\varphi = 0$$

Równania Lagrange'a – przykład 1



Praca przygotowana siły ciężkości:

$$\delta L = mg\delta r \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$$

$$\delta r = l \cdot \delta\varphi$$

$$\delta L = mgl\delta\varphi \cdot sin\varphi$$

$$\delta L = Q\delta q$$

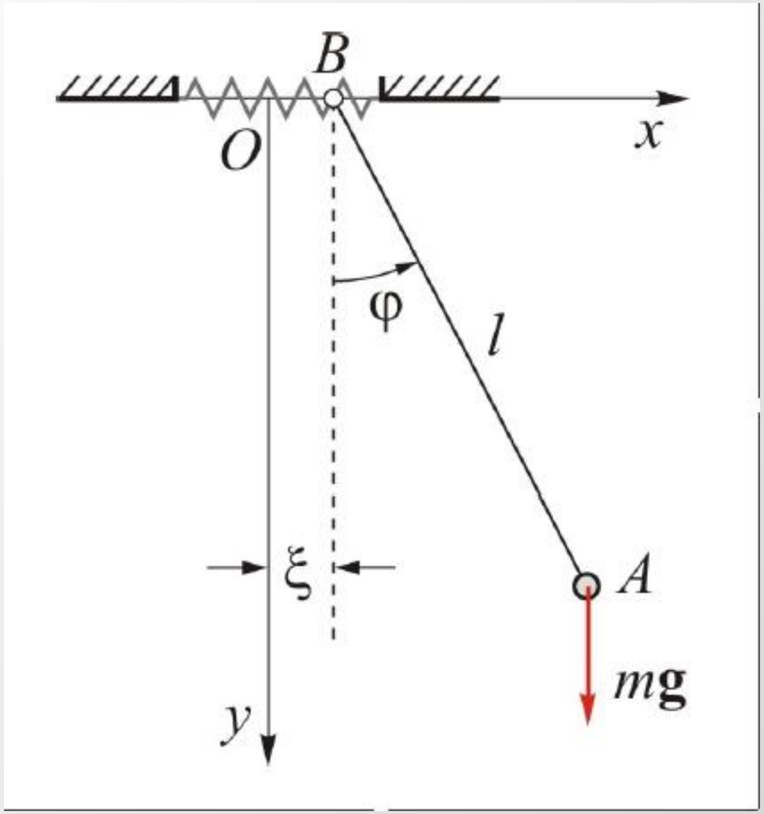
$$Q = mgl \cdot sin\varphi$$

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = mgl \cdot sin\varphi$$

$$Q = -\frac{\partial V}{\partial\varphi}$$

Równania Lagrange'a – przykład 2

Znaleźć równania ruchu wahadła matematycznego z poziomą sprężyną



$$s = 2 \qquad q_1 = \varphi \qquad q_2 = \xi$$

Położenie i prędkość punktu A:

$$x = \xi + l \cdot sin\varphi \qquad y = l \cdot cos\varphi$$

$$\dot{x} = \dot{\xi} + l\dot{\varphi} \cdot cos\varphi \qquad \dot{y} = -l\dot{\varphi} \cdot sin\varphi$$

Energia kinetyczna i potencjalna:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

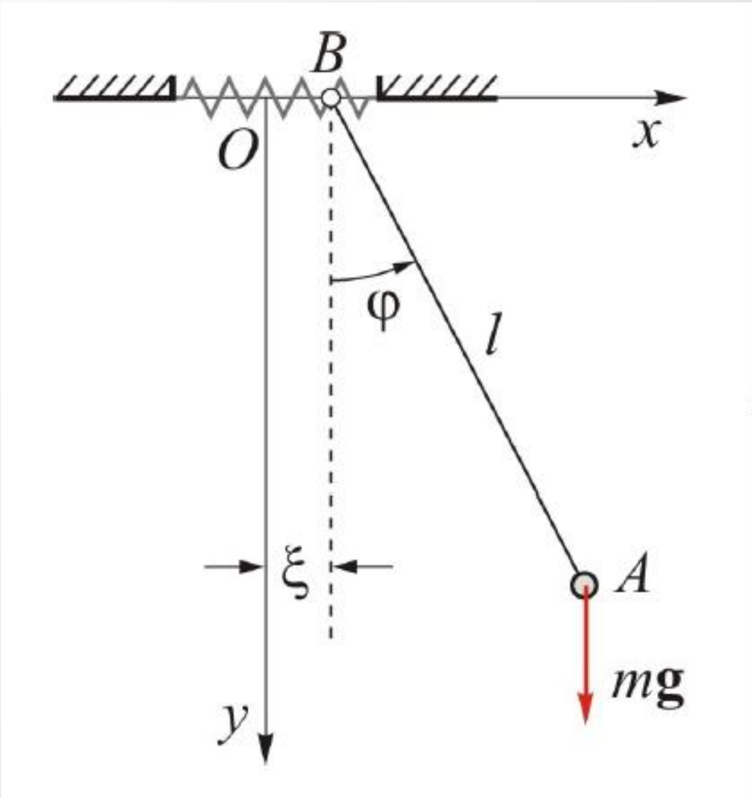
$$T = \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\xi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{\xi}cos\varphi\right)$$

$$V = -mgy + \frac{1}{2}k\xi^2$$

$$V = -mgl \cdot cos\varphi + \frac{1}{2}k\xi^2$$

Równania Lagrange'a – przykład 2

Równania Lagrange'a II rodzaju dla omawianego układu:



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = -\frac{\partial V}{\partial \xi}$$

Równania ruchu układu:

$$ml^2\ddot{\varphi} + ml^2\ddot{\xi}cos\varphi + mglsin\varphi = 0$$

$$m\ddot{\xi} + ml\ddot{\varphi}cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2 sin\varphi + k\xi = 0$$

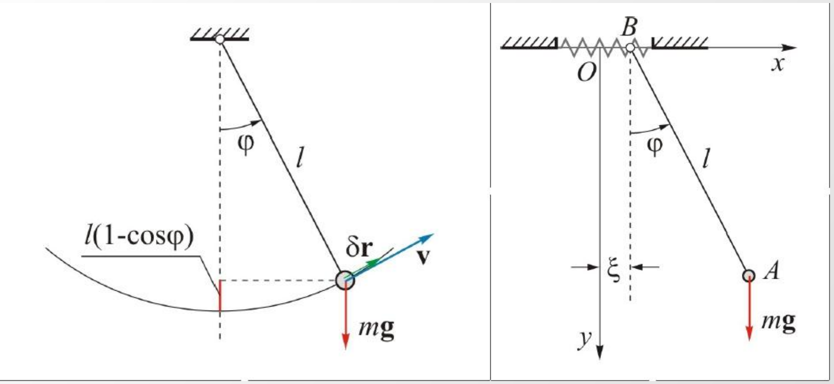
a dla wahadła bez części sprężystej było:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \cdot sin\varphi$$

Dla małych kątów wychyleń (sin$\varphi \approx \varphi$, cos$\varphi = \varphi$):

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{l}\ddot{\xi} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \qquad \ddot{\xi} + l\ddot{\varphi} + \frac{k}{m}\xi = 0$$

Rozwiązania równań ruchów wahadeł



Rozwiązanie dla wahadła bez części sprężystej (dla małych kątów):

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

po zastosowaniu metody przewidywania:

$$\varphi = A_1 sin\omega_1 t \qquad \xi = A_2 sin\omega_2 t$$

Dla wahadła ze sprężyną:

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{l}\ddot{\xi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

$$-A_1\omega_1^2 sin\omega_1 t - \frac{1}{l}A_2\omega_2^2 sin\omega_2 t + \frac{g}{l}A_1 sin\omega_1 t = 0$$

$$\ddot{\xi} + l\ddot{\varphi} + \frac{k}{m}\xi = 0$$

$$-\frac{1}{l}A_2\omega_2^2 sin\omega_2 t - lA_1\omega_1^2 sin\omega_1 t + \frac{k}{m}A_2 sin\omega_2 t = 0$$

Obliczenia iteracyjne mogą się zacząć od:

$$\omega_2 \approx \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_1^2\left(1 + \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 + \frac{k}{m}}\right) = \frac{g}{l}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

W układzie holonomicznym wielkości δq_j (j=1,2, ...,m) są niezależne, a liczba współrzędnych uogólnionych równa jest liczbie stopni swobody układu, tj. $m = s$.
Równania Lagrange'a drugiego rodzaju, tworzą układ s równań względem s funkcji $q_j(t)$.

Rząd tego układu równań jest równy 2s. Jest to najmniejszy możliwy rząd równań różniczkowych ruchu rozpatrywanego układu, ponieważ wartości początkowe wielkości q_j i q_j (j=1, 2, ..., s) mogą być dowolne.
Formułując równania Lagrange'a należy najpierw zapisać energię kinetyczną T układu ogólnie w funkcji współrzędnych i prędkości uogólnionych, znaleźć siły uogólnione Q_j oraz dokonać różniczkowania funkcji $T(q_j, q_j, t)$. Postać równań Lagrange'a nie zależy od wyboru współrzędnych uogólnionych q_l, q_2, ..., q_s, zmieniłyby się tylko funkcje T i Q. Wynika stąd, że równania Lagrange'a mają własności niezmienniczości względem tzw. przekształceń punktowych, tj. przy nowych współrzędnych uogólnionych zależnych od starych.
Równania Lagrange'a nie zawierają reakcji więzów idealnych. Aby je wyznaczyć należy, po scałkowaniu równań Lagrange'a, podstawić funkcje $q_j(t)$ do równań więzów, wówczas wypadkową R_j reakcji więzów, przyłożonych do punktu M_i, znajduje się ze związków (gdzie $\ddot{r}_i = a_i$):

$$\mathbf{R}_j = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i\left(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t\right);$$

Energia kinetyczna układu materialnego

Aby stosować równania Lagrange'a, energia kinetyczna musi być sformułowana w wielkościach uogólnionych. W układzie współrzędnych prostokątnych (Kartezjańskich) energia kinetyczna ma następującą postać:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right)$$

Współrzędne Kartezjańskie są funkcjami q_j oraz t. Stąd różniczkując poszczególne współrzędne Kartezjańskie względem czasu otrzymujemy:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$\dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial y_i}{\partial t}$$

$$\dot{z}_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial z_i}{\partial t}$$

Energia kinetyczna układu materialnego

Po zastosowaniu konwencji sumacyjnej można zapisać:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}, \quad j = 1, \dots, s$$

$$\dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial y_i}{\partial t}$$

$$\dot{y}_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial y_i}{\partial t}, \quad j = 1, \dots, s$$

$$\dot{z}_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial z_i}{\partial t}$$

$$\dot{z}_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial z_i}{\partial t}, \quad j = 1, \dots, s$$

$$T = \frac{1}{2} m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right)$$

Energia kinetyczna układu materialnego

Wstawiając uzyskane składowe prędkości do energii kinetycznej, otrzymujemy:

$$T = \frac{1}{2} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l + b_k \dot{q}_k + \frac{1}{2} c_0$$

gdzie:

$$a_{kl} = a_{lk} = m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial q_l} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \frac{\partial z_i}{\partial q_l} \right)$$

$$k, l = 1, \dots, s$$

$$b_k = m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \frac{\partial y_i}{\partial t} + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right)$$

$$c_0 = m_i \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial t} \right)^2 \right]$$

Energia kinetyczna układu materialnego

Gdy więzy, którym podlega układ, są skleronomiczne, wówczas współrzędne x_i, y_i, z_i nie zależą bezpośrednio od czasu, t.j.:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial y_i}{\partial t} = \frac{\partial z_i}{\partial t} = 0$$

W takim przypadku $b_k=0$, $c_0=0$ i energia kinetyczna może być wyznaczona w sposób uproszczony:

$$T = \frac{1}{2} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l$$

Gdy układ posiada więzy skleronomiczne to energia kinetyczna przyjmuje postać, jest jednorodną formą kwadratową prędkości uogólnionych, która jawnie nie zależy od czasu.

Energia kinetyczna układu materialnego

Forma kwadratowa jest niezwyrodniała. Stąd wynika, że wyznacznik ze współczynników energii jest różny od zera dla dowolnych q_1, q_2 , ... , q_m, to jest:

$$\det\left[a_{lk}\right]_{l,k=1}^{m} \neq 0$$

W takim przypadku formę kwadratową energii kinetycznej można zapisać w postaci:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2$$

Z powyższego wzoru wynika bezpośrednio, że energia kinetyczna jest nieujemna, to jest $T \geq 0$. Dla $T > 0$, zgodnie z twierdzeniem Sylwestra, wyznacznik a_{lk} będzie również większy od zera.

Rozwiązywalność równań Lagrange'a względem przyspieszeń uogólnionych

Wykorzystując pełną formę energii kinetycznej w równaniach Lagrange'a można je przedstawić w postaci

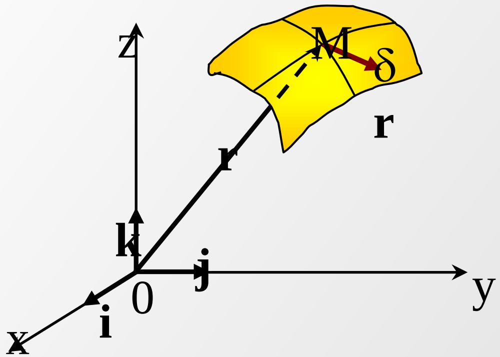
$$\sum_{j=1}^{s} a_{jk}\ddot{q}_j = f_i \qquad i = 1,2,\ldots,s$$

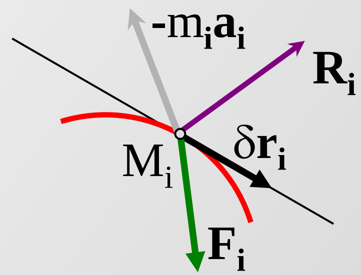
gdzie funkcje f_i nie zależą od przyspieszeń uogólnionych.
Ponieważ wyznacznik z a_{ij} dla liniowego układu równań przedstawionego powyżen względem $\ddot{q}_j$, jest różny od zera, to układ ten ma jednoznaczne rozwiązanie w postaci:

$$\ddot{q}_j = G_j\left(q_i, \dot{q}_i, t\right)$$

Powyższy wzór przedstawia normalną postać równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu, to jest rozwikłanych względem drugich pochodnych $\ddot{q}_j$.
Z teorii równań różniczkowych, przy pewnych ograniczeniach na funkcję G_j, np. przy istnieniu ciągłych pochodnych cząstkowych tej funkcji (w mechanice na ogół to zachodzi), równania te mają jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnych warunków początkowych:
$q_j(0) = q_{jo}$, $\dot{q}_j(0) = \dot{q}_{jo}$. Gdy te warunki są spełnione równania Lagrange'a w powyższej postaci spełniają warunek określoności ruchu Newtona-Laplace'a.

Równania Lagrange'a I rodzaju





$$\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{F}_i - m_i\ddot{\mathbf{r}}_i\right)\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0$$

Siła reakcji jest proporcjonalna do więzów układu mechanicznego, określonych równaniem *f(x,y,z,t)* :

$$\vec{R} = \boldsymbol{R} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

λ - mnożnik Lagrange'a

Równania Lagrange'a I rodzaju dla punktu materialnego mają postać:

$$m\ddot{x} = F_{wx} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} \qquad m\ddot{y} = F_{wy} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} \qquad m\ddot{z} = F_{wz} + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}$$

gdzie: $\boldsymbol{F}_w$ - wypadkowa siła działająca na punkt materialny

Równania Lagrange'a I rodzaju

$$\vec{R} = \boldsymbol{R} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$R = \lambda \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

Mnożnik Lagrange'a można wyznaczyć następująco:

$$\lambda = \frac{R}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}$$

Równania Lagrange'a I rodzaju - przykład

Dany punkt materialny o masie ***m***, porusza się po powierzchni (więzy!) określonej poniższym równaniem (***a,b,c,d*** - stałe), w polu sił grawitacyjnych. Określić siłę reakcji więzów.

$$f(x,y,z) = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = b; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = c$$

$$m\ddot{x} = F_{wx} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \qquad m\ddot{y} = F_{wy} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \qquad m\ddot{z} = F_{wz} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$m\ddot{x} = \lambda \cdot a \qquad m\ddot{y} = \lambda \cdot b \qquad m\ddot{z} = -mg + \lambda \cdot c$$

Należy wyznaczyć mnożnik Lagrange'a!

Równania Lagrange'a I rodzaju - przykład

$$f(x,y,z) = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = a\ddot{x} + b\ddot{y} + c\ddot{z} = 0$$

$$m\ddot{x} = \lambda \cdot a \qquad m\ddot{y} = \lambda \cdot b \qquad m\ddot{z} = -mg + \lambda \cdot c$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \lambda \frac{a^2}{m} + \lambda \frac{b^2}{m} + \lambda \frac{c^2}{m} - gc = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = \frac{mgc}{a^2 + b^2 + c^2} = const = \lambda_0$$

$$m\ddot{x} = \lambda_0 \cdot a \qquad m\ddot{y} = \lambda_0 \cdot b \qquad m\ddot{z} = -mg + \lambda_0 \cdot c$$

Równania Lagrange'a I rodzaju - przykład

$$\lambda = \frac{mgc}{a^2 + b^2 + c^2} = const = \lambda_0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = b; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = c$$

$$\vec{R} = \boldsymbol{R} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \boldsymbol{i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \boldsymbol{j} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{R} = \lambda_0 a \boldsymbol{i} + \lambda_0 b \boldsymbol{j} + \lambda_0 c \boldsymbol{k}$$

Równania Lagrange'a I rodzaju - przykład

Wyznaczenie trajektorii ruchu

$$m\ddot{x} = \lambda_0 \cdot a \qquad m\ddot{y} = \lambda_0 \cdot b \qquad m\ddot{z} = -mg + \lambda_0 \cdot c$$

Całkując powyższe równania dwukrotnie, otrzymujemy:

$$x = \frac{\lambda_0 a}{2m} t^2 + C_1 t + C_2$$

$$y = \frac{\lambda_0 b}{2m} t^2 + C_3 t + C_4$$

$$z = \frac{\lambda_0 c + mg}{2m} t^2 + C_5 t + C_6$$

Stałe całkowania muszą być tak dobrane aby spełniały tożsamościowo równania więzów. Wyznaczamy je dla warunków początkowych układu

Dziękuję za uwagę!